Rabin Verschlüsselung 1979

Idee: Rabin Verschlüsselung

- Beobachtung: Berechnen von Wurzeln in $\mathbb{Z}_p$ ist effizient möglich.
- Ziehen von Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N$ ist äquivalent zum Faktorisieren.

Vorteil: CPA-Sicherheit beruht nur auf Faktorisierungsannahme.

Für unsere bisherigen Verfahren verwendeten wir *stärkere* Annahmen.

- RSA: Berechnen von e-ten Wurzeln in $\mathbb{Z}_n$.
- Goldwasser-Micali: Unterscheiden von QR_N und QNR_N^{+1}.

Berechnen von Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_p$

Satz Ziehen von Wurzeln in $\mathbb{Z}_p$

Sei p prim mit $p = 3 \bmod 4$ und $a \in QR_p$. Dann gilt für $b^2 = a \bmod p$, dass $b = \pm a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p$. Ferner ist $a^{\frac{p+1}{4}} \in QR_p$ und $-a^{\frac{p+1}{4}} \in QNR_p$

Beweis:

- Es gilt $\left(\pm a^{\frac{p+1}{4}}\right)^2 = a^{\frac{p+1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot a = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot a = a \bmod p$.
- Wir schreiben $p = 4k + 3$. Dann gilt

$$\left(\frac{-a^{\frac{p+1}{4}}}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{a^{\frac{p+1}{4}}}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{p+1}{4}} = (-1)^{2k+1} = (-1).$$

- Damit folgt $-a^{\frac{p+1}{4}} \in QNR_p$ und $a^{\frac{p+1}{4}} \in QR_p$.

Quadratwurzel bei bekannter Faktorisierung

Definition Blum-Zahl

Sei $N = pq$ ein RSA-Modul. N heißt *Blum-Zahl* falls $p = q = 3 \bmod 4$.

Satz Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N$

Sei $N = pq$ eine Blum-Zahl mit bekannten p, q. Dann können die vier Quadratwurzeln von $a \in QR_N$ in Zeit $\mathcal{O}(\log^3 N)$ berechnet werden.

Beweis:

Algorithmus QUADRATWURZEL

EINGABE: $N, p, q, a \in QR_N$

1. Berechne $x_p \leftarrow a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p$, $x_q \leftarrow a^{\frac{q+1}{4}} \bmod q$.
2. Berechne mittels Chinesischem Restsatz die Lösungen von
$$\left| \begin{array}{l} b_1 = x_p \bmod p \\ b_1 = x_q \bmod q \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} b_2 = -x_p \bmod p \\ b_2 = x_q \bmod q \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} b_3 = x_p \bmod p \\ b_3 = -x_q \bmod q \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} b_4 = -x_p \bmod p \\ b_4 = -x_q \bmod q \end{array} \right|$$

AUSGABE: $b_1, \ldots, b_4$ mit $b_i^2 = a \bmod N$

Hauptwurzeln

Satz Existenz einer Hauptwurzel

Sei $N = pq$ eine Blumzahl. Dann besitzt jedes $a \in QR_N$ genau ein $b \in QR_N$ mit $b^2 = a \bmod N$. Wir bezeichnen b als *Hauptwurzel*.

Beweis:

- Algorithmus QUADRATWURZEL liefert
$$b_1 \simeq (x_p, x_q) \in QR_p \times QR_q.$$
- Damit ist $b_1 \in QR_N$ eine Hauptwurzel.
- Alle anderen Wurzel b_2, b_3, b_4 sind keine Hauptwurzeln.
- Z.B. gilt $b_2 = (-x_p, x_q) \in QNR_p \times QR_q$ und damit $b_2 \in QNR_N$.

Quadratwurzeln ohne Faktorisierung

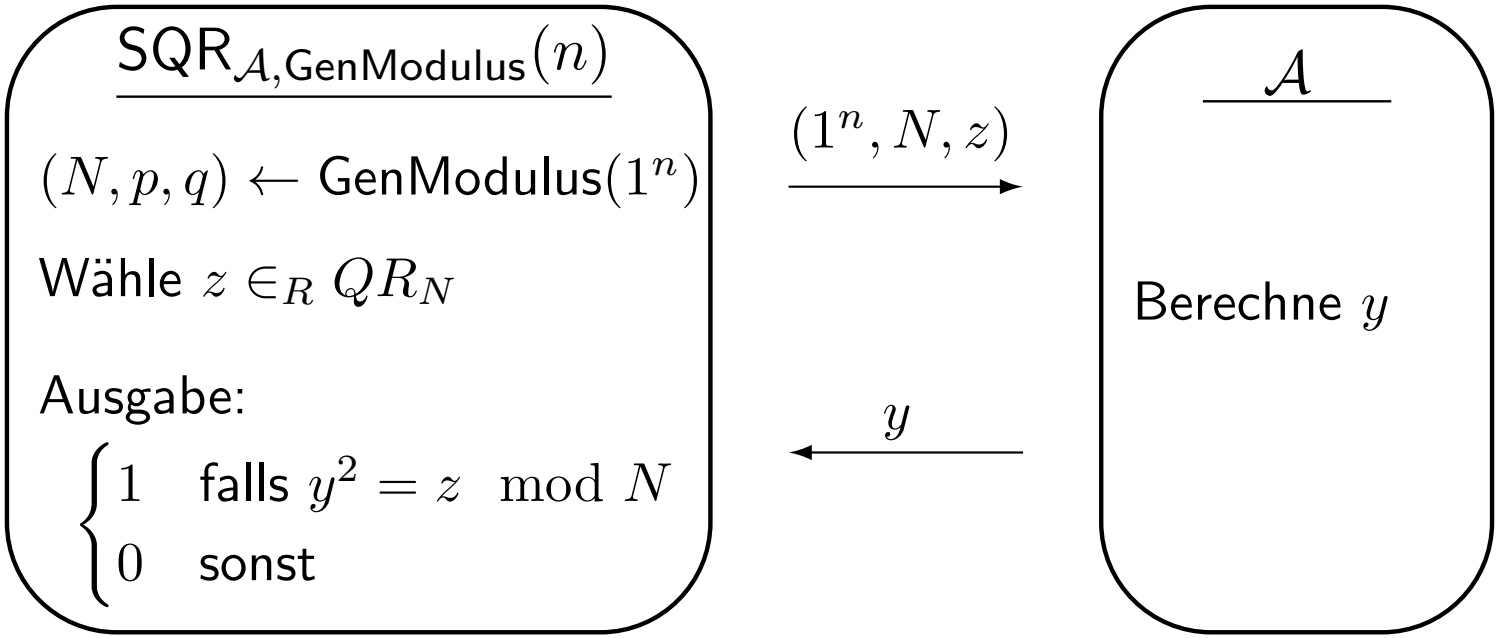
Spiel Wurzelziehen $SQR_{\mathcal{A},GenModulus}(n)$

1. $(N, p, q) \leftarrow GenModulus(1^n)$
2. Wähle $z \in_R QR_N$.
3. $y \leftarrow \mathcal{A}(1^n, N, z)$
4. $$SQR_{\mathcal{A},GenModulus}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y^2 = z \bmod N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Definition Quadratwurzelannahme

Das *Berechnen von Quadratwurzeln* ist hart bezüglich *GenModulus*, falls für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt $\mathrm{Ws}[SRQ_{\mathcal{A},GenModulus}(n) = 1] \leq \mathrm{negl}(n)$.
Quadratwurzelannahme: Berechnen von Quadratwurzeln ist hart.

Spiel Wurzelziehen



Nicht-triviale Quadratwurzeln

Satz Faktorisieren mit Wurzeln

Sei $N = pq$ ein RSA-Modul. Seien $x, y \in \mathbb{Z}_N^*$ mit $x^2 = y^2 \bmod N$ und $x \neq \pm y \bmod N$. Dann können p, q in Zeit $\mathcal{O}(\log^2 N)$ berechnet werden.

Beweis:

- Mittels CRT erhalten wir $x \simeq (x_p, x_q) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$.
- Es gilt $y \simeq (x_p, -x_q)$ oder $y \simeq (-x_p, x_q)$.
- Wir betrachten den Fall $y \simeq (x_p, -x_q)$. Der zweite Fall ist analog.
- Es gilt $x + y \simeq (2x_p, 0)$ bzw. $x - y \simeq (0, 2x_q)$.
- Damit folgt $\mathrm{ggT}(N, x + y) = q$ bzw. $\mathrm{ggT}(N, x - y) = p$ wegen $2x_p \in \mathbb{Z}_p^*$ und $2x_q \in \mathbb{Z}_q^*$.
- Die ggT-Berechnung benötigt Laufzeit $\mathcal{O}(\log^2 N)$.

Quadratwurzeln implizieren Faktorisierung

Satz Quadratwurzeln implizieren Faktorisierung

Quadratwurzel- und Faktorisierungsannahme sind äquivalent.

Beweis:

- Bereits gezeigt: Faktorisierung impliziert Quadratwurzeln.
- Sei $\mathcal{A}$ Angreifer im Spiel $SQR_{\mathcal{A},GenModulus}(n)$ mit Erfolgsws $\epsilon(n)$.
- Konstruieren einen Angreifer $\mathcal{A}'$ im Spiel $Factor_{\mathcal{A}',GenModulus}(n)$.

Algorithmus $\mathcal{A}'$

EINGABE: N

1. Wähle $x \in \mathbb{Z}_N^*$ und berechne $z \leftarrow x^2 \bmod N$.
2. $y \leftarrow \mathcal{A}(1^n, N, z)$
3. Falls $x = \pm y \bmod N$ oder $x^2 \neq y^2 \bmod N$, Abbruch.

AUSGABE: $p, q = \{\mathrm{ggT}(N, x+y), \mathrm{ggT}(N, x-y)\}$

Faktorisieren mit Quadratwurzeln

- Unter der Faktorisierungsannahme gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{negl}(n) &\geq \mathrm{Ws}[\mathit{Factor}_{\mathcal{A}',\mathit{GenModulus}}(n) = 1] \\
&= \mathrm{Ws}[x \neq \pm y \bmod N \wedge x^2 = y^2 \bmod N] \\
&= \mathrm{Ws}[x \neq \pm y \bmod N \mid x^2 = y^2 \bmod N] \cdot \mathrm{Ws}[x^2 = y^2 \bmod N] \\
&= \mathrm{Ws}[x \neq \pm y \bmod N \mid x^2 = y^2 \bmod N] \cdot \epsilon(n) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \epsilon(n)
\end{aligned}$$

- Die letzte Gleichung folgt, da x^2 exakt vier Wurzeln in $\mathbb{Z}_N^*$ besitzt.

Einwegfunktion unter Quadratwurzelannahme

Definition Einwegfunktion QUADRAT

Definieren *Einwegfunktionsfamilie* QUADRAT$=(Gen, Samp, f)$ als

1. ***Gen*(1^n) :** $(N, p, q) \leftarrow GenModulus(1^n)$, Ausgabe $I = N$.
   Definiert $f : \mathbb{Z}_N^* \rightarrow QR_N$.
2. ***Samp*(I) :** Wähle $x \in_R \mathbb{Z}_N^*$ zufällig.
3. ***f*$_I(x)$:** Berechne $f(x) := x^2 \bmod N$.

Anmerkungen:

- QUADRAT ist Einwegfunktion unter der Quadratwurzelannahme.
- D.h. QUADRAT ist Einwegfunktion unter Faktorisierungsannahme.
- **Ziel:** Konstruktion einer Trapdoor-Einwegpermutation.

RABIN Trapdoor-Einwegpermutation

Definition RABIN Trapdoor-Einwegpermutation

Trapdoor-Einwegpermutationsfamilie RABIN$= (Gen, Samp, f)$ mit

1. $\boldsymbol{Gen(1^n)}$: $(N, p, q) \leftarrow GenModulus(1^n)$ mit Blumzahl N.
   Ausgabe $I = N$, $td = (p, q)$. Definiert $f : QR_N \to QR_N$.
2. $\boldsymbol{Samp(I)}$: Wähle $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$ zufällig. Berechne $x \leftarrow r^2 \bmod N$.
3. $\boldsymbol{f_I(x)}$: Berechne $y = f(x) := x^2 \bmod N$.
4. $\boldsymbol{Inv_{td}(y)}$: Bestimme Hauptwurzel $x \in QR_N$ von $y = x^2$.

Anmerkungen:

- RABIN ist einweg unter der Faktorisierungsannahme. Wir wissen:

  Trapdoor-Einwegpermutation + Hardcore-Prädikat
  = CPA-sichere Verschlüsselung.

- Benötigen ein Hardcore-Prädikat $hc : QR_N \to \{0, 1\}$ für f.

Berechnen des niederwertigsten Bits

Satz Hardcore-Prädikat $lsb(x)$

Sei f die RABIN Trapdoor-Einwegpermutation und N eine Blumzahl. Für $x \in QR_N$ bezeichne $lsb(x)$ das niederwertigste Bit von x. Dann ist $hc(x) := lsb(x)$ ein Hardcore-Prädikat für f.

- ohne Beweis (nicht-trivial)
- Für alle ppt $\mathcal{A}$ gilt damit $\mathrm{Ws}[\mathcal{A}(1^n, N, x^2) = lsb(x)] \leq \frac{1}{2} + \mathrm{negl}(n)$.

RABIN Kryptosystem (1979)

Algorithmus RABIN Verschlüsselung

1. **Gen:** $(N, p, q) \leftarrow \mathit{GenModulus}(1^n)$, wobei N eine Blumzahl ist. Ausgabe $pk = N$, $sk = (p, q)$.
2. **Enc:** Für $m \in \{0,1\}$ wähle $r \in \mathbb{Z}_N^*$, berechne $x \leftarrow r^2 \bmod N$ und
$$c \leftarrow (x^2 \bmod N, \mathit{lsb}(x) \oplus m).$$
3. **Dec:** Für $c = (c_1, c_2)$ berechne Hauptwurzel x von c_1 und
$$m := \mathit{lsb}(x) \oplus c_2.$$

Satz CPA-Sicherheit von RABIN

RABIN Verschlüsselung ist CPA-sicher unter der Faktorisierungsannahme.

Beweis:

- Folgt aus dem Satz zur CPA-Sicherheit von VERSCHLÜSSELUNG$_\Pi$.

Diskussion RSA versus RABIN

Vergleich: RSA und RABIN

- Quadrieren und Exponentieren mit e erscheinen ähnlich.
- Aber: RABIN ist kein Spezialfall von RSA, da $e = 2 \notin \mathbb{Z}^*_{\phi(N)}$.
- RABIN-Einwegpermutation beruht auf Faktorisierungsannahme.
- Die Faktorisierungsannahme ist möglicherweise schwächer als die RSA-Annahme. Offen: Invertieren von RSA $\Rightarrow$ Faktorisierung?
- RABIN ist nicht ineffizienter als RSA.

- Historische Variante: Textbook RABIN mit $c := m^2 \bmod N$.
- Es existiert ein CCA-Angriff auf Textbook RABIN, der p, q liefert. (Wie?)