

Übungsbetrieb

- Di. 8-10 neuer Raum HZO 60
- Anmeldung zum Übungsbetrieb erforderlich
- Anmeldung über VSPL
- Anmeldefrist: Freitag, der 02.11.

Wiederholung

Permutationen

- Fixpunkte
- Derangementzahl $D_n = n! - \zeta_n$
- Zyklen
- Stirlingzahl $s_{n,k}$ erster Art
 - Anzahl Permutationen mit k Zyklen
 - $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$
- Stirlingdreieck 1. Art

Wiederholung

Teilmengen

- Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten
- Pascal'sches Dreieck
- k-Partition
- Stirlingzahl $S_{n,k}$ zweiter Art
 - Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge
 - $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$
- Stirlingdreieck 2. Art
- Bellzahlen: $\sum_{k=1}^n S_{n,k}$

Wiederholung

Zahlpartitionen

- geordnet

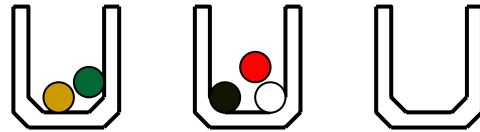
- Reihenfolge der Summanden wichtig: $1+2$, $2+1$
- Anzahl $\binom{n-1}{k-1}$

- ungeordnet $P_{n,k}$

- Reihenfolge der Summanden unerheblich: $1+2 = 2+1$
- $P_{n+k,k} = \sum_{i=1}^k P_{n,i}$

Verteilen von Bällen in Urnen

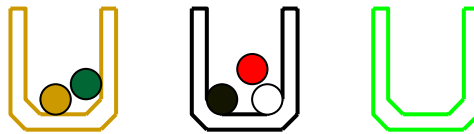
Abbildungsfunktion $f: B \Rightarrow U$ mit $|B|=n$ und $|U|=m$



Betrachten folgende Fälle

- Bälle unterscheidbar/nicht unterscheidbar
- Urnen unterscheidbar/nicht unterscheidbar
 - f beliebig, d.h. wir verteilen die Bälle beliebig
 - f injektiv, d.h. jede Urne enthält höchstens einen Ball
 - f surjektiv, d.h. jede Urne enthält mindestens einen Ball
 - f bijektiv, d.h. jede Urne enthält genau einen Ball

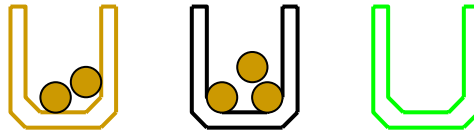
Bälle und Urnen unterscheidbar



Verteilen n Bälle auf m Urnen mittels $f: B \rightarrow U$.

- f beliebig:
 - m^n Möglichkeiten
- f injektiv (für $n \leq m$):
 - m^n Möglichkeiten
- f surjektiv (für $n \geq m$):
 - Betrachten Urbildmengen $T_u := \{f^{-1}(u) \mid u \in U\}$.
 - Die T_u sind nicht-leer und bilden m -Partition von B .
 - $S_{n,m}$ Möglichkeiten für die Urbildmenge B .
 - Für jede feste m -Partition: $m!$ Möglichkeiten zur Verteilung auf U .
 - Insgesamt: $S_{n,m} * m!$
- f bijektiv: (für $n=m$):
 - $m!$ Möglichkeiten

Urnen unterscheidbar, Bälle nicht



Idee: Zähle wieviele Bälle in welcher Urne sind, z.B. 2+3+0.

- **f beliebig:**

- Kodierung ****|***|** für 2 Bälle in 1. Urne, 3 in 2. Urne, 0 in 3. Urne
- Anzahl Kodierungen bei n Sternen und $m-1$ Trennstrichen:

$$\binom{n+m-1}{n}$$

- **f injektiv** (für $n \leq m$):

- Wähle n Urnen aus, die genau einen Ball enthalten: $\binom{m}{n}$

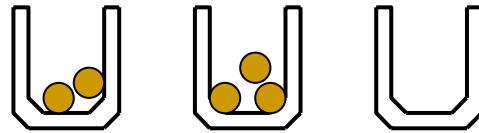
- **f surjektiv** (für $n \geq m$):

- Urne u_i enthält b_i viele Bälle, $b_i \geq 1$ mit: $b_1 + b_2 + \dots + b_m = n$
- $\binom{n-1}{m-1}$ Möglichkeiten

- **f bijektiv:** (für $n=m$):

- 1 Möglichkeit

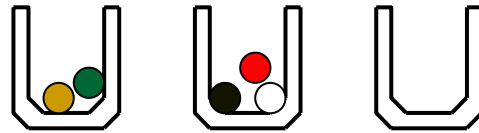
Bälle und Urnen nicht unterscheidbar



Idee: Anzahl der Bälle in Urnen ist entscheidend, Reihenfolge egal

- **f beliebig:**
 - k Urnen belegt: $P_{n,k}$ Möglichkeiten
 - Insgesamt: $\sum_{k=1}^m P_{n,k}$
- **f injektiv (für $n \leq m$):**
 - 1 Möglichkeit
- **f surjektiv (für $n \geq m$):**
 - m Urnen belegt
 - $P_{n,m}$ Möglichkeiten
- **f bijektiv: (für $n=m$):**
 - 1 Möglichkeit

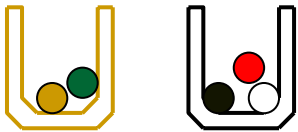
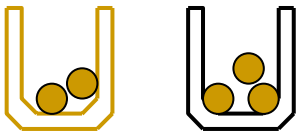
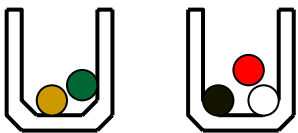
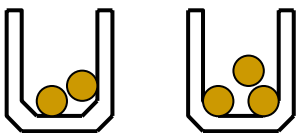
Bälle unterscheidbar, Urnen nicht



Idee: Entspricht Partitionierung der Bälle.

- f beliebig:
 - k Urnen belegt: $S_{n,k}$ Möglichkeiten
 - Insgesamt: $\sum_{k=1}^m S_{n,k}$
- f injektiv (für $n \leq m$):
 - 1 Möglichkeit
- f surjektiv (für $n \geq m$):
 - m -Partitionierung
 - $S_{n,m}$ Möglichkeiten
- f bijektiv: (für $n=m$):
 - 1 Möglichkeit

Zusammenfassung

$ B =n$ $ U =m$	beliebig	injektiv $n \leq m$	surjektiv $n \geq m$	bijektiv $n=m$
	m^n	m^n	$S_{n,m} * m!$	$m!$
	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	1
	$\sum_{k=1}^m S_{n,k}$	1	$S_{n,m}$	1
	$\sum_{k=1}^m P_{n,k}$	1	$P_{n,m}$	1

Erinnerung: Partielle Ordnung

Def: Eine Relation zwischen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.

Falls $A=B$, spricht man von einer Relation auf A.

Eigenschaften von Relationen auf einer Menge:

- Reflexiv: $\forall a \in A: (a,a) \in R$
- Symmetrisch: $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
- Antisymmetrisch: $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b$
- Transitiv: $\forall a,b,c \in A: (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

Def: Eine partielle Ordnung ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf A.

- Schreibweise: $a \preceq b$ statt $(a,b) \in R$
- Partiiell geordnete Menge: $(A, \preceq)$, genannt poset.

Beispiele für Posets

- $(\mathbb{N}, |)$

Sei A eine beliebige Menge.

- $(\mathcal{M}, \subseteq)$, wobei
 - $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ($\mathcal{M}$ heisst Mengensystem)
- $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{R}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq)$

Reflexive transitive Hülle

Def:

- $(x,y) \in R^+ \Leftrightarrow \exists x=a_1, \dots, a_n=y \in A$ mit $(a_i, a_{i+1}) \in R$ für $1 \leq i < n$.
 - R^+ heisst transitive Hülle.
- $R^* = R^+ \cup \{ (x,x) \mid x \in A \}$
 - R^* heisst reflexive transitive Hülle.

Bsp:

- $R = \{(S,T) \subseteq [n] \mid S \subset T\}$
 - $R^+ = R$
 - $R^* = \{(S,T) \subseteq [n] \mid S \subseteq T\}$
- $R = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = 2b\}$
 - $R^+ = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = 2^k b, k \geq 1\}$
 - $R^* = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = 2^k b, k \geq 0\}$

Lineare Ordnung

Sei $(S, \preceq)$ partielle Ordnung.

Def.:

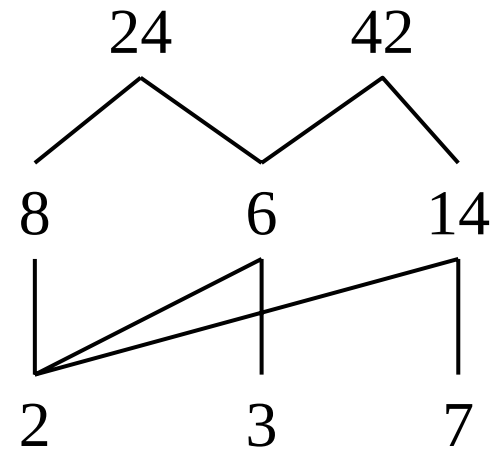
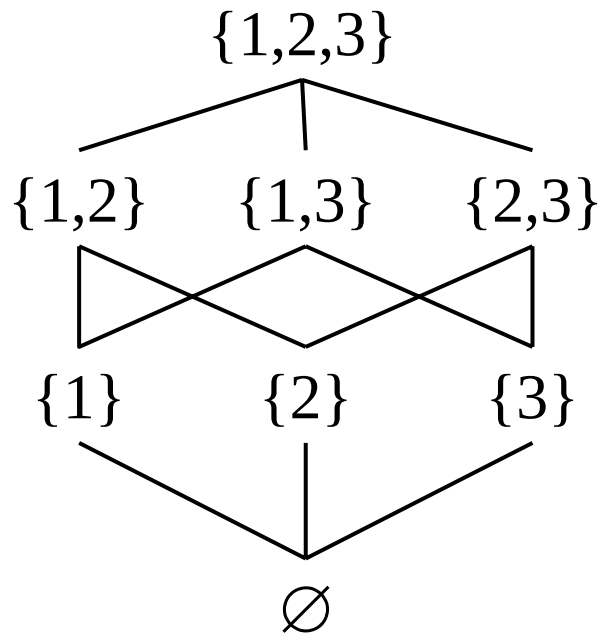
- x, y vergleichbar $\Leftrightarrow x \preceq y$ oder $y \preceq x$
 x, y unvergleichbar sonst
- $(S, \preceq)$ vollständig/total $\Leftrightarrow x, y$ vergleichbar $\forall x, y \in S$
 S heisst dann lineare Ordnung.
- Sei S eine lineare Ordnung. $(S, \preceq_L)$ heisst lineare Erweiterung von $(S, \preceq) \Leftrightarrow \forall x, y \in S: x \preceq y \Rightarrow x \preceq_L y$

Bsp.:

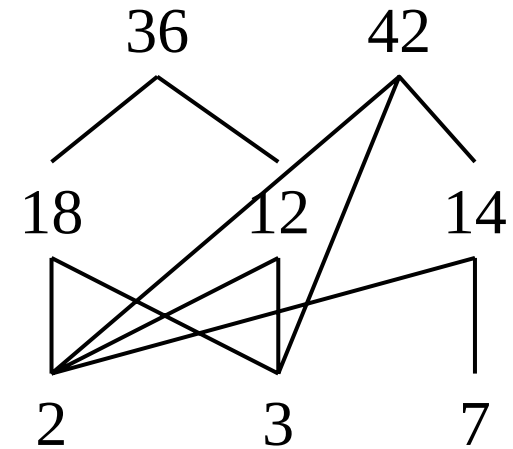
- $(\{1\}, \{1, 3\}, \{2\}, \subseteq)$
 - $\{1\}$ und $\{1, 3\}$ sind vergleichbar, $\{1, 3\}$ und $\{2\}$ nicht vergleichbar
- $(\mathbb{N}, \leq)$ ist lineare Ordnung
- $(\mathbb{N}, \leq)$ ist lineare Erweiterung der nicht vollständigen Ordnung $(\mathbb{N}, |)$

Hasse-Diagramm

- b steht über $a \Leftrightarrow a \preceq b$



Maxima und Suprema



Sei $(S, \preceq)$ poset.

Def:

- $y \in S$ max. Element $\Leftrightarrow \forall x \in S: x \preceq y$ oder x, y unvergleichbar
 - 36, 42 sind maximale Elemente
- $x \in S$ min. Element $\Leftrightarrow \forall y \in S: x \preceq y$ oder x, y unvergleichbar
 - 2, 3, 7 sind minimale Elemente
- a obere Schranke von $x, y \Leftrightarrow x \preceq a$ und $y \preceq a$.
- a Supremum von $x, y \Leftrightarrow \forall b, b$ obere Schranke von $x, y: a \preceq b$.
 - Schreibweise: $a = x \vee y$.
 - $3 \vee 14 = 42, 7 \vee 14 = 14$.
 - 2 und 3 besitzen obere Schranken 18, 12, 42:
Kein Supremum, da unvergleichbar.
 - 7 und 12 besitzen keine gemeinsame obere Schranke.
- a Infimum von $x, y \Leftrightarrow \forall b, b$ untere Schranke von $x, y: b \preceq a$.
 - Schreibweise: $a = x \wedge y$.

Verband

Def: Eine partielle Ordnung $(S, \preceq)$ heisst Verband

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S: x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.

Eine Verband ist distributiv, falls für alle $x, y, z \in S$:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

In jedem Verband gilt:

- Kommutativität: $x \vee y = y \vee x,$ $x \wedge y = y \wedge x$
- Assoziativität: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
- Idempotenz: $x \vee x = x,$ $x \wedge x = x$
- Absorption: $x \vee (x \wedge y) = x,$ $x \wedge (x \vee y) = x$

Zusammenfassung

■ Bälle in Urnen

- ❑ Bälle unterscheidbar/nicht unterscheidbar
- ❑ Urnen unterscheidbar/nicht unterscheidbar

■ Partielle Ordnungen

- ❑ Reflexive transitive Hülle
- ❑ Lineare Ordnung
- ❑ Hasse-Diagramm
- ❑ Suprema und Infima