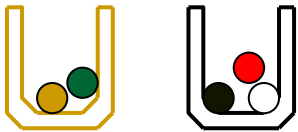
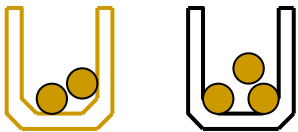
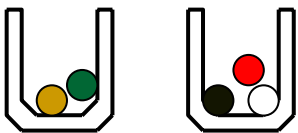
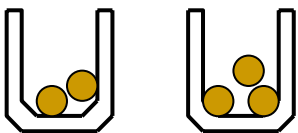


Wiederholung

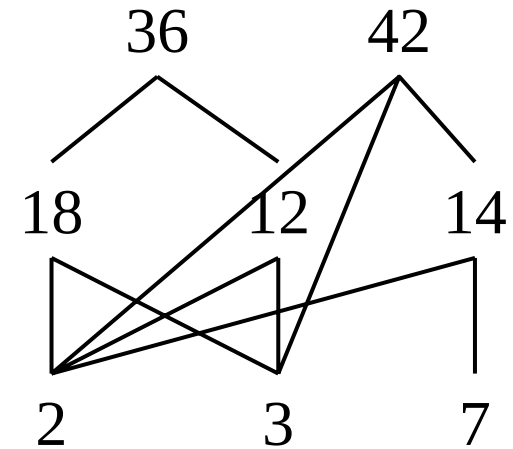
$ B =n$ $ U =m$	beliebig	injektiv $n \leq m$	surjektiv $n \geq m$	bijektiv $n=m$
	m^n	m^n	$S_{n,m} * m!$	$m!$
	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	1
	$\sum_{k=1}^m S_{n,k}$	1	$S_{n,m}$	1
	$\sum_{k=1}^m P_{n,k}$	1	$P_{n,m}$	1

Wiederholung

■ Partielle Ordnungen

- Reflexive transitive Hülle
- Lineare Ordnung
- Hasse-Diagramm
- Suprema und Infima
- Steht noch aus: (Distributive) Verbände

Maxima und Suprema



Sei $(S, \preceq)$ poset.

Def:

- $y \in S$ max. Element $\Leftrightarrow \forall x \in S: x \preceq y$ oder x, y unvergleichbar
 - 36, 42 sind maximale Elemente
- $x \in S$ min. Element $\Leftrightarrow \forall y \in S: x \preceq y$ oder x, y unvergleichbar
 - 2, 3, 7 sind minimale Elemente
- a obere Schranke von $x, y \Leftrightarrow x \preceq a$ und $y \preceq a$.
- a Supremum von $x, y \Leftrightarrow \forall b, b$ obere Schranke von $x, y: a \preceq b$.
 - Schreibweise: $a = x \vee y$.
 - $3 \vee 14 = 42, 7 \vee 14 = 14$.
 - 2 und 3 besitzen obere Schranken 18, 12, 36, 42:
Kein Supremum, da unvergleichbar.
 - 7 und 12 besitzen keine gemeinsame obere Schranke.
- a Infimum von $x, y \Leftrightarrow \forall b, b$ untere Schranke von $x, y: b \preceq a$.
 - Schreibweise: $a = x \wedge y$.

Verband

Def: Eine partielle Ordnung $(S, \preceq)$ heisst Verband

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S: x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren.

Eine Verband ist distributiv, falls für alle $x, y, z \in S$:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

In jedem Verband gilt:

- Kommutativität: $x \vee y = y \vee x,$ $x \wedge y = y \wedge x$
- Assoziativität: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
- Idempotenz: $x \vee x = x,$ $x \wedge x = x$
- Absorption: $x \vee (x \wedge y) = x,$ $x \wedge (x \vee y) = x$

2. Distributivgesetz

1. Distributivgesetz: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Satz: In jedem distributiven Verband gilt:

$$\mathbf{x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)}$$

Beweis: $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$$= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z)$$

$$= ((x \wedge x) \vee (x \wedge y)) \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$

$$= (x \vee (x \wedge y)) \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$

$$= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$

$$= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z)$$

$$= x \vee (y \wedge z)$$

Verbandoperation versus Ordnung

Satz: Sei $(S, \preceq)$ ein Verband. Dann gilt für $x, y \in S$:

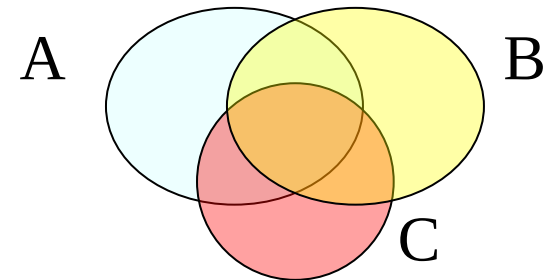
$$x \vee y = y \Leftrightarrow x \preceq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$$

Beweis: Zeigen $x \vee y = y \Leftrightarrow x \preceq y$, 2. Äquivalenz analog

- $\Rightarrow$: Definition von $x \preceq y$
- $\Leftarrow$: Sei $x \preceq y$.
 - S Verband $\Rightarrow x \vee y = z$ existiert mit $x \preceq y \preceq z$
 - Annahme: Supremum $z \neq y$.
 - y und z sind beides obere Schranken von x, y
 - $y \preceq z$, d.h. z kann kein Supremum von x, y sein

Beispiele

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sind distributive Verbände.
 - Hasse Diagramme sind unendliche Ketten.
- Sei S eine Menge. Dann ist $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ein distributiver Verband.
 - $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ist eine partielle Ordnung.
 - Seien $A, B \in \mathcal{P}(S)$. Dann gilt
 - $A \wedge B = \text{Übungsaufgabe}$
 - $A \vee B = \text{Übungsaufgabe}$
 - Distributivgesetz: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Sei V ein Vektorraum und $\mathcal{U}(V)$ die Menge aller Untervektorräume von V . Dann ist $(\mathcal{U}(V), \subseteq)$ ein Verband.
 - $(\mathcal{U}(V), \subseteq)$ ist eine partielle Ordnung.
 - Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(V)$. Dann gilt:
 - $U_1 \wedge U_2 = U_1 \cap U_2$
 - $U_1 \vee U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$, der von $U_1 \cup U_2$ erzeugte Raum
 - Distributivgesetz: $U_1 \cap (\langle U_2 \cup U_3 \rangle) = \langle (U_1 \cap U_2) \cup (U_1 \cap U_3) \rangle$



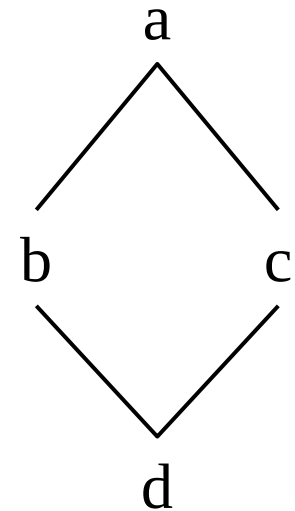
Weitere Verbände

- Verband gegeben durch Verknüpfungstafeln

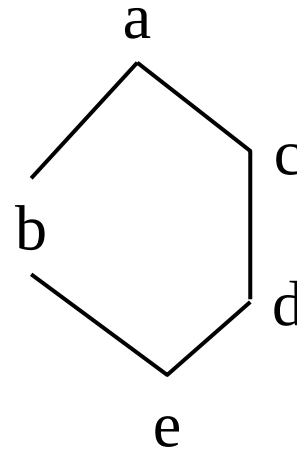
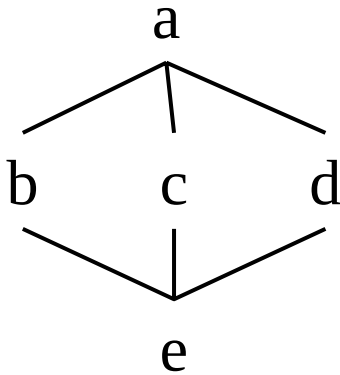
$\vee$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

Hasse Diagramm:



Nicht-distributive Verbände



■ Linke Abbildung:

- $b \vee (c \wedge d) = b \vee e = b$, aber
- $(b \vee c) \wedge (b \vee d) = a \wedge a = a$

■ Rechte Abbildung:

- $d \vee (b \wedge c) = d \vee e = d$, aber
- $(d \vee b) \wedge (d \vee c) = a \wedge c = c$

Anwendungsbeispiel: Zugriffskontrolle

- Zugriffsrechte $Z = \{\text{jeder, Gruppe, Admin}\}$ mit:
 $\text{jeder} \preceq \text{Gruppe} \preceq \text{Admin}$
 - Studium $S = \{\text{Mathe, AI, ITS}\}$
 - Information i erhält Zuweisung
 - (z, S') mit $z \in Z$ und $S' \subseteq S$
 - Person p erhält Klassifikation
 - (z_p, S_p) mit $z_p \in Z$ und $S' \subseteq S$
 - p darf auf i zugreifen $\Leftrightarrow z \preceq z_p$ und $S' \subseteq S_p$
 $\Leftrightarrow (z, p) \preceq (z_p, S_p)$
- d.h. $(Z \times \mathcal{P}(S), \preceq)$ muss distributiven Verband bilden.
- Bsp: $i = (\text{jeder}, \{\text{ITS}\})$
 - p mit $(\text{Admin}, \{\text{AI, Mathe}\})$ darf nicht zugreifen.
 - p mit $(\text{Gruppe}, \{\text{AI, ITS}\})$ darf zugreifen

Graphentheorie

■ Ungerichtete Graphen

- Zusammenhangskomponenten
- Traversierungen: Breiten- und Tiefensuche
- Besuchen aller Kanten, Knoten
- Färben, Heiratssatz

■ Gerichtete Graphen

- Kreisfreiheit, topologische Sortierung
- gewurzelte Bäume

■ Gewichtete Graphen

- Minimale Wege/ Spann bäume

Definition ungerichteter Graph

Def: Ein ungerichteter Graph G ist ein Tupel $G=(V,E)$, wobei

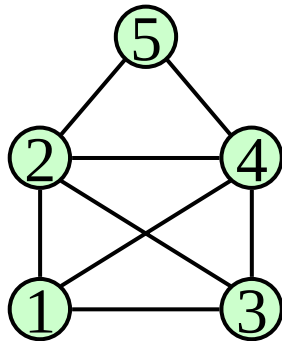
- $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ die Menge der Knoten
- $E=\{e_1,\dots,e_m\}$ die Menge der Kanten

ist.

Sei $\binom{V}{2} := \{\{u,v\} \subseteq V^2 \mid u \neq v\}$ die Menge der 2-elementigen Teilmengen von V .

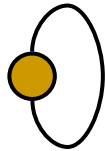
Dann ist $E \subseteq \binom{V}{2}$.

- $V = \{1,2,3,4,5\}$
- $E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{4,5\}\}$

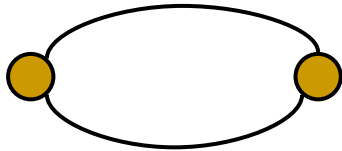


Was (noch) **nicht** erlaubt ist

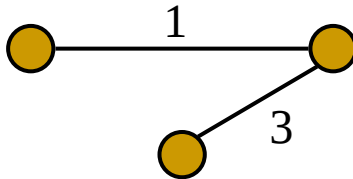
- Schlingen: $\{v, v\} \notin E$



- Mehrfachkanten: E ist keine Multimenge.



- Gewichtete Kanten: $g: E \rightarrow \mathbb{Z}$ (dazu später)



Anwendungsbeispiel Graphen

Turnier mit Teilnehmern a,b,c,d,e:

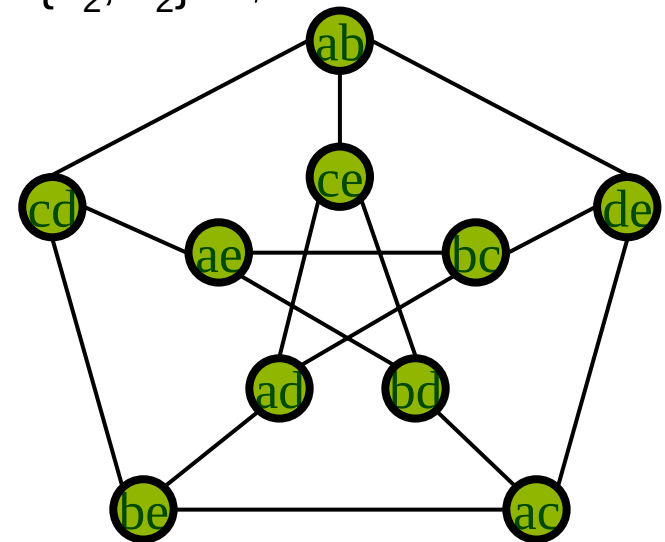
- Modus: Jeder gegen jeden
- Keiner soll in aufeinander folgenden Spielen antreten

Modellierung als Graph G:

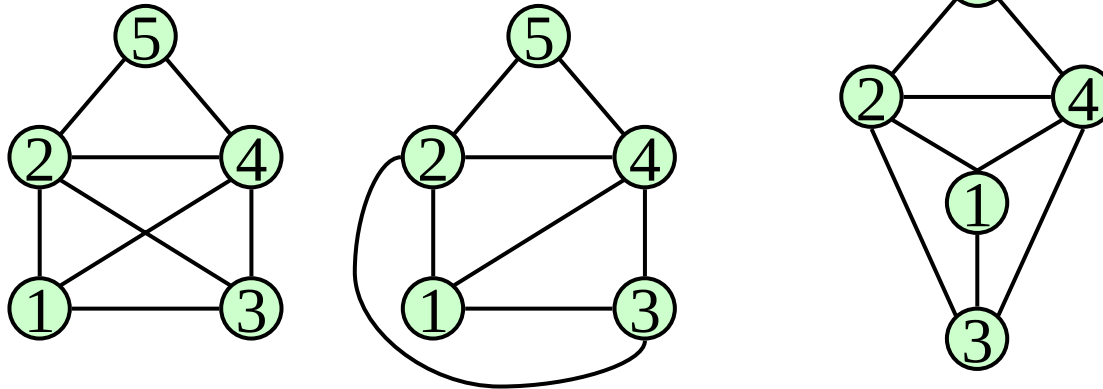
- Stelle alle 10 Paarungen als Knoten in G dar.
- Verbinde Knoten $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_2\}$ gdw $\{u_1, v_1\} \cap \{u_2, v_2\} = \emptyset$

Graphproblem:

Finde einen Pfad, der alle Knoten genau einmal besucht.



Isomorphismen von Graphen

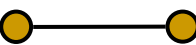


Def: $G_1=(V_1,E_1)$ und $G_2=(V_2,E_2)$ isomorph

$\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $f:V_1 \rightarrow V_2: \{u,v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$

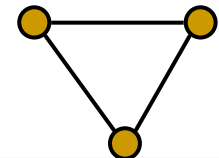
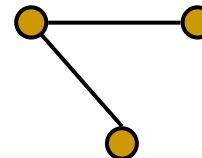
Isomorphieklassen von Graphen mit n Knoten:

■ $n=1$: 

■ $n=2$:  

■ $n=3$: 

■ $n=3$:

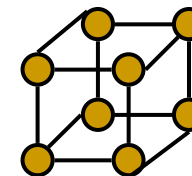
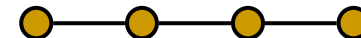
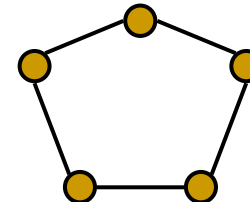
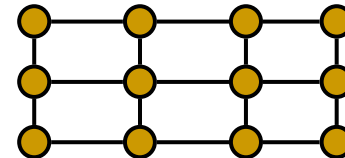
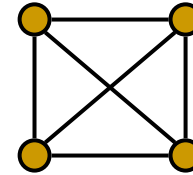


Mehr Isomorphieklassen

n	# Graphen mit $ V =n$
1	1
2	2
3	4
4	11
5	34
6	156
7	1044
8	12344
9	308168

Spezielle Graphen

- vollständiger Graph K_n :
 - n Knoten paarweise miteinander verbunden
- Gittergraph $M_{n,m}$:
 - n Zeilen von m Knoten zeilen- und spaltenweise verbunden
- Kreisgraph C_n :
 - n Knoten zirkulär verbunden
- Pfad P_n :
 - n Knoten als Pfad verbunden
- d -dim Hyperwürfel Q_n :
 - $V = \{v \in \{0,1\}^n\}$
 - $E = \{u,v \in V^2 \mid u, v \text{ unterscheiden sich in einer Stelle}\}$



Nachbarschaft, Grad, regulär, Inzidenz

Def: Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

- Nachbarschaft von $v \in V$:

$$\Gamma(v) = \{u \in V \mid \{u,v\} \in E\}$$

- Grad von $v \in V$: $\deg(v) = |\Gamma(v)|$
- G heisst k -regulär $\Leftrightarrow \deg(v)=k \quad \forall v \in V$
- $u,v \in V$ adjazent $\Leftrightarrow \{u,v\} \in E$
- Sei $e=\{u,v\} \in E$.
 - u,v heißen Endpunkte von e .
 - Man nennt u und e (bzw. v und e) inzident.

Handschlaglemma

Satz: Für jeden Graphen $G=(V,E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 |E|.$$

Beweis:

- $\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V} |I(v)| = \sum_{v \in V} |\{u \in V \mid \{u,v\} \in E\}|$
- Jede Kante $\{u,v\}$ wird doppelt gezählt:
 - Einmal bei den Nachbarn von u und
 - einmal bei den Nachbarn von v .

V : Gruppe von Personen

E : Paare von Personen, die sich per Handschlag begrüßen.

Handschlaglemma Teil 2

**Korollar: Für jeden Graphen $G=(V,E)$ gilt:
Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade.**

Beweis:

■ Sei $V_g := \{v \in V \mid \deg(v) \text{ gerade}\}$, $V_u := \{v \in V \mid \deg(v) \text{ ungerade}\}$

■ Es gilt:

$$\begin{aligned} 2|E| &= \sum_{v \in V} \deg(v) \\ &= \sum_{v \in V_g} \deg(v) + \sum_{v \in V_u} \deg(v) \end{aligned}$$

■ Die linke Summe ist gerade, da jeder Summand gerade ist.

⇒ Die rechte Summe muss gerade sein.

(Falls nicht ist die Gesamtsumme ungerade).

■ Die rechte Summe muss eine Summe über **gerade viele** ungerade Terme sein, d.h. $|V_u| = 0 \bmod 2$.

Auf jedem Empfang geben gerade viele Gäste ungerade vielen die Hand.

Zusammenfassung

■ Verband

- Partielle Ordnung
- Suprema und Infima $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren
- Distributiver Verband

■ Ungerichtete Graphen

- Isomorphien
- Spezielle Graphen
 - Vollständig, Gitter, Kreis, Pfad, Hyperwürfel
- Handschlaglemma