

Wiederholung

■ Verband

- Partielle Ordnung
- Suprema und Infima $x \vee y$ und $x \wedge y$ existieren
- Distributiver Verband

■ Ungerichtete Graphen

- Isomorphien
- Spezielle Graphen
 - Vollständig, Gitter, Kreis, Pfad, Hyperwürfel
- Handschlaglemma

Weg, Pfad, Kreis

- Weg der Länge k , $k \geq 0$
 - Folge $(v_0, \dots, v_k)$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $0 \leq i < k$
- Pfad der Länge k , $k \geq 0$
 - Weg $(v_0, \dots, v_k)$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$
 - v_0 ist Anfangs-, v_k ist Endknoten
- u - v Weg/Pfad
 - Weg/Pfad mit Anfangsknoten u und Endknoten v
 - v_0 ist trivialer Pfad der Länge 0.
- Kreis der Länge k , $k \geq 3$
 - Folge $(v_0, \dots, v_{k-1})$ mit $\{v_i, v_{i+1 \bmod k}\} \in E$ für $0 \leq i < k$,
 $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$
 - Beachte: Wegen $k \geq 3$ sind triviale Kreise der Länge < 3 unzulässig.

Schwacher/induzierter Teilgraphen

Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

- $G_1=(V_1, E_1)$ heisst schwacher Teilgraph falls
 - $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E \cap \binom{V_1}{2}$

- $G_2=(V_2, E_2)$ heisst bezüglich V_2 induzierter Teilgraph falls
 - $V_2 \subseteq V, E_2 = E \cap \binom{V_2}{2}$
 - Schreibweise: $G_2 = G[V_2]$

Zusammenhangskomponenten

Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

Def: G zusammenhängend $\Leftrightarrow \forall u,v \in V: \exists u\text{-}v \text{ Pfad in } G$

- Nicht zusammenhängende Graphen bestehen aus zusammenhängenden Teilgraphen.

Def: Sei $V' \subseteq V$ maximal mit der Eigenschaft:

$\forall u,v \in V': \exists u\text{-}v \text{ Pfad in } G[V']$.

Dann ist $G[V']$ ist Zusammenhangskomponente (ZHK) von G .

Sei $R = \{(u,v) \in V^2 \mid \{u,v\} \in E\}$.

- Dann ist $R^* = \{(u,v) \in V^2 \mid \exists u\text{-}v \text{ Pfad}\}$ die reflexive, transitive Hülle von R .
- $R^* = \{(u,v) \in V^2 \mid \exists u\text{-}v \text{ Pfad}\}$ ist Äquivalenzrelation.
- Äquivalenzklassen definieren die ZHK von $G[V']$.

Anzahl ZHK

Satz: Sei $G=(V, E)$ mit $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ und $E=\{e_1, \dots, e_m\}$. Dann besitzt G mindestens $n-m$ Zusammenhangskomponenten.

Beweis per Induktion über m :

IV: $m=0$: n Zusammenhangskomponenten $G[v_1], \dots, G[v_n]$

IS: $m-1 \rightarrow m$

- Sei $E' = E \setminus \{e_m\}$.
- Nach Induktionsannahme hat $G'=(V, E')$ mindestens $n-m+1$ ZHK.
 - Fall 1: $e_m=\{u, v\}$ und u, v liegen in derselben ZHK von G' .
 $\Rightarrow G$ hat mindestens $n-m+1$ ZHK.
 - Fall 2: $e_m=\{u, v\}$ und u, v liegen in verschiedenen ZHK von G' .
 $\Rightarrow G$ hat mindestens $n-m$ ZHK.

Für zusammenhängende Graphen

Korollar: In jedem zusammenhängenden Graphen $G=(V,E)$ mit $|V|=n$, $|E|=m$ gilt:

$$m \geq n-1.$$

Beweis:

- In jedem Graph G gilt: $\#(\text{ZHK}(G)) \geq n-m$.
 - Da G zusammenhängend ist: $\#(\text{ZHK}(G)) = 1$.
- $$\Rightarrow 1 \geq n-m \Leftrightarrow m \geq n-1$$

Bäume und Wälder

Def: G ist kreisfrei

$\Leftrightarrow$ Kein schwacher Teilgraph von G ist ein Kreis.

Def: $G=(V,E)$ ist ein Baum

$\Leftrightarrow G$ ist kreisfrei und zusammenhängend.

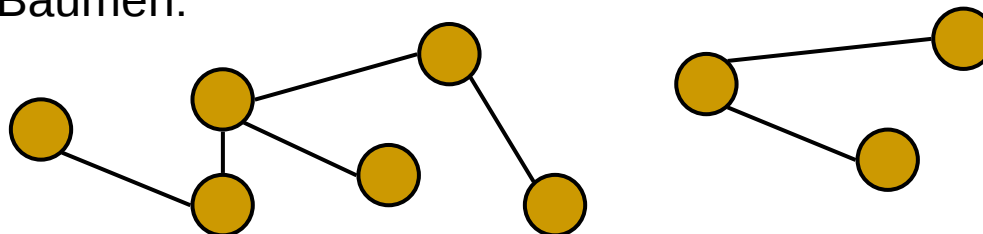
Def: $G=(V,E)$ ist ein Wald

$\Leftrightarrow$ ZHK von G sind Bäume.

Def: Sei $G=(V,E)$ ein Baum.

Jeder Knoten von $v \in V$ mit $\deg(v)=1$ heisst Blatt.

Bsp.: Wald mit 2 Bäumen:



Eigenschaften von Bäumen

Satz: Sei $G=(V,E)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- 1. G ist ein Baum.**
- 2. $\forall u,v \in V: \exists! u\text{-}v\text{-Pfad in } G$**
- 3. G ist zusammenhängend, $G=(V,E \setminus \{e\})$ ist nicht zusammenhängend für alle $e \in E$.**
- 4. G ist zusammenhängend und hat genau $n-1$ Kanten.**
- 5. G ist kreisfrei und hat genau $n-1$ Kanten.**
- 6. G ist kreisfrei und für alle nicht inzidenten $u,v \in V: G'=(V, E \cup \{u,v\})$ enthält Kreis.**

Ringschluss $1. \Rightarrow 2.$

z.z.: G ist ein Baum $\Rightarrow \forall u, v \in V: \exists! u$ - v -Pfad in G

Trivial für $\{u, v\} \in E$. Betrachten $\{u, v\} \notin E$:

- G zusammenhängend $\Rightarrow \forall u, v: \exists u$ - v -Pfad $p = (v_0 = u, \dots, v_k = v)$
- Annahme: $\exists$ zweiter Pfad $p' = (v'_0 = u, \dots, v'_t = v)$
 - $k, t > 1$, wegen $\{u, v\} \notin E$.
 - Sei r minimal mit $v_r \neq v'_r$, $0 < r < k$.
 - $(v_r, v_{r+1}, \dots, v_k, v'_{t-1}, \dots, v'_{r+1})$ Kreis in G . (Widerspruch zur Kreisfreiheit)

Ringschluss $2. \Rightarrow 3.$

z.z.: $\forall u, v \in V: \exists! \text{ u-v-Pfad in } G$

**$\Rightarrow G$ ist zusammenhängend, $G'=(V, E \setminus \{e\})$
nicht zusammenhängend für alle $e \in E$**

- Zusammenhang von G offensichtlich.
- Sei $e=\{u, v\}$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $e=\{u, v\}$ der einzige u - v Pfad in G .
 - $\Rightarrow G'$ besitzt keinen u - v -Pfad.
 - $\Rightarrow G'$ ist nicht zusammenhängend.

Ringschluss $3. \Rightarrow 4.$

z.z.: G ist zusammenhängend, $G'=(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend für alle $e \in E$

$\Rightarrow G$ ist zusammenhängend und hat genau $n-1$ Kanten

Durch Entfernen jeder beliebigen Kante aus E erhöht sich die Anzahl der ZHK um 1:

- G hat 1 ZHK.
- $G_1 = (V, E \setminus \{e_1\})$ hat 2 ZHK.
- $G_2 = (V, E \setminus \{e_1, e_2\})$ hat 3 ZHK.
- ...
- $G_{n-1} = (V, \emptyset)$ hat n ZHK, d.h. $m=n-1$.

Ringschluss $4. \Rightarrow 5.$

z.z.: G ist zusammenhängend und hat genau $n-1$ Kanten
 $\Leftrightarrow G$ ist kreisfrei und hat genau $n-1$ Kanten

„ $\Rightarrow$ “: Annahme: G hat einen Kreis K .

- Sei $K=(v_0, \dots, v_{k-1})$ mit Länge k .
- $n-k$ Knoten ausserhalb von K müssen von Knoten in K erreichbar sein.
 - Sukzessives Einbinden in ZHK erfordert 1 Kante pro Knoten.
 - Insgesamt $k+(n-k)=n$ Kanten (Widerspruch: $n-1$ Kanten)

„ $\Leftarrow$ “: Annahme: G ist nicht zusammenhängend.

- Füge $n-1$ Kanten aus E sukzessive zu $G_0=(V, \emptyset)$ hinzu.
 - Beh: Jede Kante $e=\{u, v\}$ verbindet zwei verschiedene ZHK
 - Ann: u, v sind in selber ZHK
 - $\Rightarrow \exists$ u - v -Pfad $p=(u=v_0, \dots, v=v_k)$.
 - $\Rightarrow p$ ist zusammen mit e ein Kreis (Widerspruch: G ist kreisfrei)
 - Aus der Behauptung folgt: $G=(V, E)$ hat eine ZHK.

Ringschluss $5. \Rightarrow 6. \Rightarrow 1.$

z.z.: G ist kreisfrei und hat genau $n-1$ Kanten $\Rightarrow G$ ist kreisfrei und für alle nicht inzidenten $u, v \in V$: $G'=(V, E \cup \{u,v\})$ enthält Kreis.

Wegen $4. \Rightarrow 3.$: G ist zusammenhängend.

$\Rightarrow u, v \in V$: $\exists$ u - v -Pfad $p=\{u=v_0, \dots, v=v_k\}$ in G , $k>1$

$\Rightarrow p$ bildet zusammen mit $\{u,v\}$ einen Kreis.

z.z.: G ist kreisfrei und für alle nicht inzidenten $u, v \in V$: $G'=(V, E \cup \{u,v\})$ enthält Kreis $\Rightarrow G$ ist Baum.

Für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt:

- $\{u,v\}$ in E oder
 - $\{u,v\}$ ist in Kreis K in G' . Nimm $\{u,v\}$ aus dem Kreis, dann existiert noch ein Weg von v nach u in G (der Rest vom Kreis).
- $\Rightarrow \forall u, v$ in V existiert ein u, v -Pfad in G .
- $\Rightarrow G$ ist zusammenhängend.

Anzahl von Kanten in Wäldern

Satz: Sei $G=(V,E)$ ein Wald mit k ZHK. Dann hat G genau $m=n-k$ viele Kanten.

Seien $G[V_1], \dots, G[V_k]$ die ZHK von G .

$\Rightarrow G[V_i]$ sind Bäume für $i=1, \dots, k$.

$\Rightarrow G[V_i]$ besitzen $|V_i|-1$ Kanten.

$\Rightarrow m = \sum_{i=1}^k (|V_i|-1) = (\sum_{i=1}^k |V_i|) - k = n-k$.

Zusammenfassung

- Weg, Pfad, Kreis
- schwacher/induzierter Teilgraph
- Zusammenhangskomponenten (ZHK)
- Bäume und Wälder
 - Baum: kreisfrei, zusammenhängend, $n-1$ Kanten