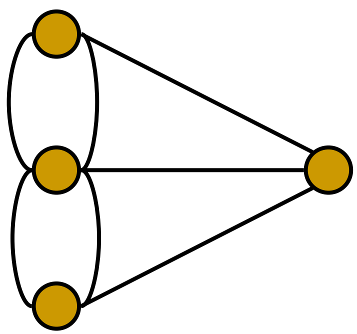
Wiederholung

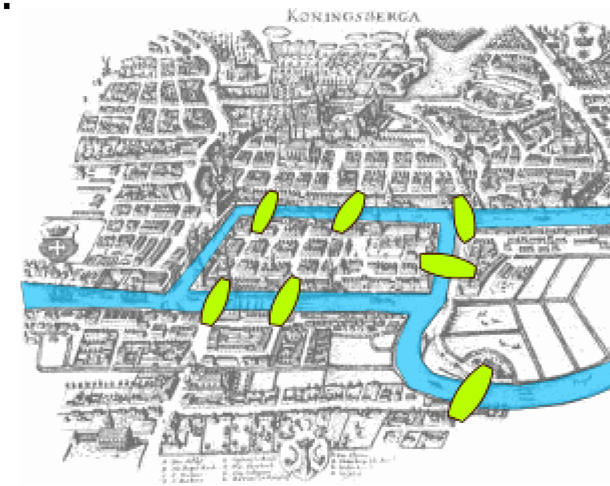
- Breitensuche BFS mit Startknoten s
  - Berechnet kürzeste s-v-Pfade
  - Berechnet Spannbaum
  - Zusammenhangskomponenten
  - Laufzeit $\mathcal{O}$(n+m)
- Tiefensuche
  - Berechnet Spannbaum
  - Laufzeit $\mathcal{O}$(n+m)
- Hamiltonsche Kreis
  - Berechenbar für sehr dichte Graphen

Königsberger Brückenproblem

Euler(1736): Kein Rundweg durch Königsberg mit

- Alle Brücken über die Pregel werden genau einmal besucht.
- Startpunkt ist identisch mit Endpunkt.





Def: Sei G=(V,E). Eine Eulertour in G ist ein Pfad, der jede Kante genau einmal besucht, und bei dem Anfangs- und Endknoten übereinstimmen.

Graphen mit Eulertour nennt man eulersch.

Kriterium für eulersche Graphen

Satz: Sei $G=(V,E)$ zusammenhängend.
G eulersch $\Leftrightarrow$ deg(v) gerade für alle $v \in V$

„$\Rightarrow$“:

- Sei $p=(v_0,v_1,\ldots,v_k,v_0)$ eine Eulertour.
  - Innerer Knoten $v \neq v_0$ komme t, t>0, mal in der Eulertour vor.
    $\Rightarrow$ $\deg(v) = 2t$
  - Knoten v_0 komme t+2, $t \geq 0$, mal vor.
    $\Rightarrow$ $\deg(v_0) = 2t+2$

G eulersch $\Leftarrow$ deg(v) gerade

Algorithmus Eulertour

Eingabe: G(V,E) mit deg(v) gerade für alle v $\in$ V

1. $W_0 \leftarrow (v)$ für beliebiges v
2. $i \leftarrow 1$
3. while (nicht alle Kanten besucht)
    1. Wähle Knoten v_j in $W_{i-1}=(v_0,\ldots,v_k=v_0)$, der zu nicht besuchter Kante $\{v_j,u\}$ inzident ist.
    2. Konstruiere Weg $W_i‘=(v_j,u,\ldots,v_j)$.
    3. $W_i \leftarrow (v_0,\ldots,v_j,u,\ldots, v_j,\ldots,v_k=v_0)$, d.h. verschmelze W_{i-1} und W_i‘.

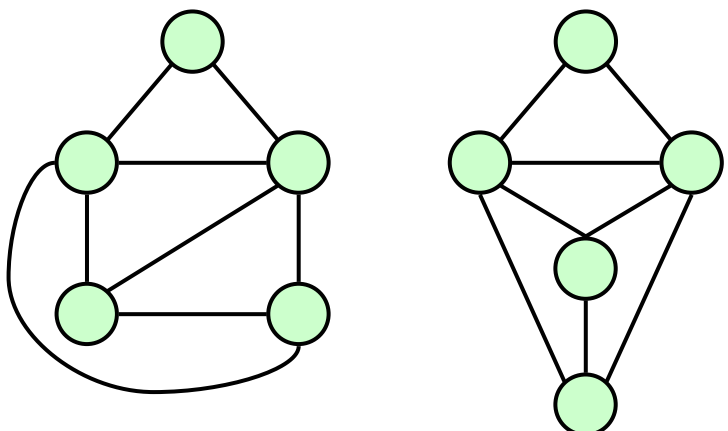
Ausgabe: Eulertour W_i

Korrektheit:

- Alle Kanten werden besucht, d.h. Algorithmus terminiert.
- Da G zusammenhängend ist, werden alle Knoten besucht.
- z.z.: Konstruktion von W_i‘ in Schritt 3.2 ist möglich:
    - Da jeder innere Knoten w in W_i‘ geraden Grad hat, kann w wieder verlassen werden.
    - Weg muss schliesslich wieder in v_j enden.

Planare Graphen

Def: Ein Graph G=(V,E) heisst planar falls er in den $\mathbb{R}^2$ einbettbar ist, d.h. falls seine Kanten so dargestellt werden können, dass sie sich paarweise nicht schneiden.

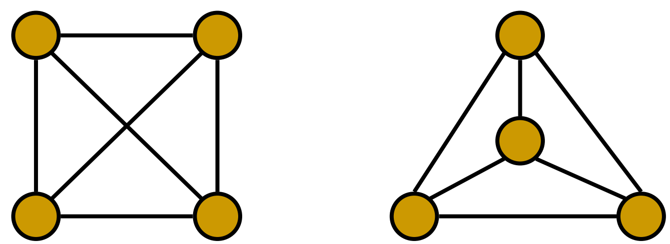


- Kanten: (Jordan-)Kurven
  - Strecken statt Kurven liefert dieselbe Klasse von Graphen. (Fary's Theorem)

Planare Graphen

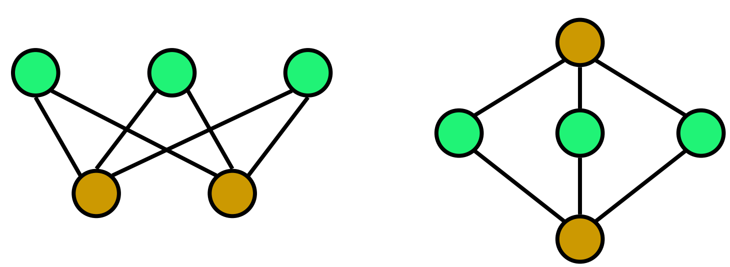
Ebenes und nicht-ebenes Diagramm des K_4.

- Ebenes Diagramm unterteilt in 4 Gebiete $R=\{r_1,\ldots r_4\}$.



Bipartite Graphen K_{n_1,n_2}

- n_1 braune Knoten, n_2 grüne Knoten
- $e = \{u,v\} \in E \Leftrightarrow$ u,v haben verschiedene Farben



|R| ist topologische Invariante.

Satz (Eulersche Polyederformel): Sei G=(V,E) zusammenhängend und planar. Sei f die Anzahl der Flächen eines ebenen Diagramms von G. Dann gilt:

$$\mathbf{f = m-n+2.}$$

Beweis per Induktion über m

IV: m=n-1, für m<n-1 ist G nicht zusammenhängend.

- G ist Baum, d.h. kreisfrei
- G hat f = 1 = (n-1)-n+2 Flächen

IS: m-1 $\rightarrow$ m. Sei |E| = m.

- G muss Kreis C enthalten. Sei e$\in$ C.
- G'=(V, E\{e}) hat m-1 Kanten und daher f'=m-n+1 Flächen.
- In G werden zwei Flächen von G' durch e getrennt.
- G hat f'+1=m-n+2 Flächen.

Flächen bei nicht-zusammenhängenden G

Korollar: Sei G=(V,E) mit k ZHK. Dann gilt:

$$\mathbf{f = m\text{-}n+k+1.}$$

- ZHK: $G_1=(V_1,E_1), \ldots, G_k=(V_k, E_k)$
- Für jedes G_i mit $|V|=n_i$, $|E|=m_i$ gilt:
  - $f_i = m_i-n_i+2$
  - Außenfläche wird k-mal gezählt

$$\Rightarrow \quad f = \sum_i m_i - \sum_i n_i + 2k - (k-1)$$
$$= m-n+k+1$$

Kriterium für nicht-planare Graphen

Satz: Für jeden planaren Graphen G=(V,E) gilt: $m \leq 3(n-2)$

- Sei $E=\{e_1,\dots,e_m\}$ und $R=\{r_1,\dots,r_f\}$.
- Relation $A=\{(e,r) \in E \times R \mid e$ ist (im Rand) von $r\}$
- Doppeltes Abzählen:
  - Zeilensumme: Jedes e begrenzt höchstens zwei Gebiete
    $\Rightarrow |A| \leq 2m$
  - Spaltensumme: Jedes r wird von mindestens drei Kanten begrenzt.
    $\Rightarrow |A| \geq 3f$
- Insgesamt:

$$\begin{aligned} 3f &\leq 2m \\ \Leftrightarrow 3(m-n+2) &\leq 2m2 \\ \Leftrightarrow m &\leq 3(n-2) \end{aligned}$$

Korollar: Für planare G=(V,E) ohne Kreise mit Länge 3 gilt: $m \leq 2(n-2)$
Beweis: $4(m-n+2) \leq 2m \Leftrightarrow m \leq 2(n-2)$

Nicht-planare Graphen

Korollar: K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

- K_n ist für $n \geq 5$ nicht planar
  - K_n hat $½n(n-1) \geq 3(n-2)$ Kanten.
- $K_{3,3}$ ist nicht planar.
  - Bipartite Graphen besitzen keine Kreise der Länge 3.
  - Annahme: Sei $C=(c_1,c_2,c_3)$ Kreis in K_{n_1,n_2}.
    - ObdA sei c_1 grün gefärbt.
    - Dann ist c_2 braun und c_3 grün.
    - Damit können c_1 und c_3 nicht verbunden sein.
  - $K_{3,3}$ hat $3*3 \geq 2(n-2)=8$ Kanten

Satz von Kuratowski

Sei $G=(V,E)$ und $e=\{u,v\} \in E$

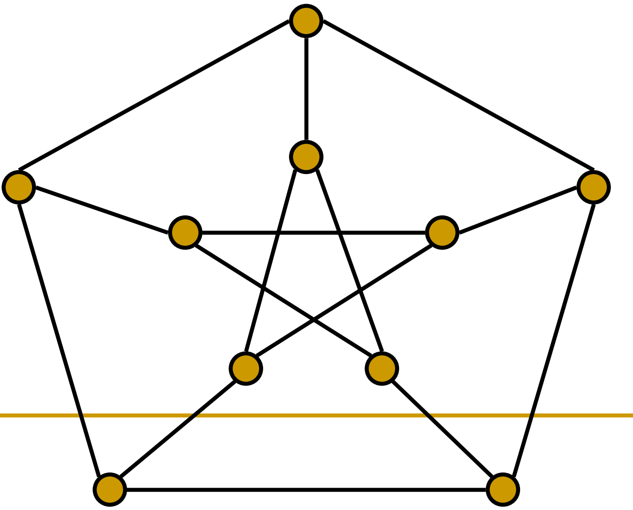
- Einfügen von Knoten v‘ in Kante e:
  - $V' \leftarrow V \cup \{v'\}$, $E \leftarrow E \setminus e \cup \{\{u,v'\}, \{v',v\}\}$
- $H=(V',E')$ ist Unterteilung von G:
  - H kann aus G durch Einfügen von Knoten konstruiert werden.

Satz(Kuratowski):

G planar $\Leftrightarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$.

(ohne Beweis)

Petersongraph ist nicht planar.



Grad eines Knoten in planaren Graphen

Satz: Sei G planar. Dann besitzt G einen Knoten v mit deg(v)$\leq$ 5.

Ann: deg(v) $\geq$ 6.

$\Rightarrow$ 2m=$\sum_v$ deg(v) $\geq$ 6n

$\Rightarrow$ m $\geq$ 3n (Widersprich: m<3(n-2))

Zusammenfassung

- Königsberger Brückenproblem
  - Eulertour
    - besucht alle Kanten
    - Anfangs- und Endknoten sind gleich
  - G eulersch $\Leftrightarrow$ deg(v)=0 mod 2 für alle v $\in$ V
- Planare Graphen
  - Flächenanzahl invariant: f = m-n+2
  - Dünn besetzte Graphen: m < 3(n-2)
  - Jeder nicht planare enthält Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$
  - Enthält Knoten v mit deg(v) $\leq$ 5