12. Woche: Verifizierer, nicht-deterministische Turingmaschine, Klasse $\mathcal{NP}$

Polynomielle Verifizierer und NP

Definition Polynomieller Verifizierer

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Eine DTM V heißt *Verifizierer für L*, falls V für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ hält und folgendes gilt:

$$w \in L \Leftrightarrow \exists c \in \Sigma^* : V \text{ akzeptiert Eingabe } (w, c).$$

Das Wort c nennt man einen *Zeugen oder Zertifikat für w*.

V heißt *polynomieller Verifizierer für L*, falls für alle $w \in \Sigma^*$ in Laufzeit polynomiell in $|w|$ hält und folgendes gilt:

$$w \in L \Leftrightarrow \exists c \in \Sigma^*, |c| \leqslant |w|^k, k \in \mathbb{N} : V \text{ akzeptiert Eingabe } (w, c).$$

L ist *polynomiell verifizierbar* $\Leftrightarrow \exists$ polynomieller Verifizierer für L.

Definition Klasse $\mathcal{NP}$

$$\mathcal{NP} := \{L \mid L \text{ ist polynomiell verifizierbar.}\}$$

Polynomieller Verifizierer für RUCKSACK

Satz

RUCKSACK $\in \mathcal{NP}$.

Beweis:

Algorithmus Polynomieller Verifizierer für RUCKSACK

Eingabe: (W, P, B, k, c) mit Zeuge $c = \subseteq [n]$

1. Falls $\sum_{i \in c} w_i \leqslant B$ und $\sum_{i \in c} p_i \geqslant k$, akzeptiere.
2. Lehne ab.

Laufzeit:

- Eingabegrößen: $\log w_i, \log p_i, \log B, \log k, n$
- Laufzeit: $\mathcal{O}(n \cdot \log(\max_i\{w_i, p_i, B, k\}))$ auf RAM.
- D.h. die Laufzeit ist polynomiell in den Eingabegrößen.

Optimaler Wert einer Lösung mittels Entscheidung

RUCKSACK$_{wert}$

- Gegeben: $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ und B.
- Gesucht: $\max_{I \subseteq [n]} \{\sum_{i \in I} p_i \mid \sum_{i \in I} w_i \leqslant B\}$

Sei M eine DTM, die RUCKSACK in Laufzeit $T(M)$ entscheide.

Algorithmus OPTIMUM

Eingabe: W, P, B

1. $\ell \leftarrow 0, r \leftarrow \sum_{i=1}^{n} p_i$
2. WHILE $(\ell \neq r)$
   1. Falls M bei Eingabe $(W, P, B, \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil)$ akzeptiert, $\ell \leftarrow \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil$.
   2. Sonst $r \leftarrow \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil - 1$.

Ausgabe: ℓ

- Korrektheit: Binäre Suche nach Optimum auf Intervall $[0, \sum_{i=1}^{n} p_i]$.
- Laufzeit: $\mathcal{O}(\log(\sum_{i=1}^{n} p_i)) \cdot T(M)$.
- Insbesondere: Laufzeit ist polynomiell, falls $T(M)$ polynomiell ist.

Optimale Lösung mittels optimalem Wert

Algorithmus Optimale Lösung

Eingabe: W, P, B

1. $opt \leftarrow \text{OPTIMUM}(W, P, B)$, $I \leftarrow \emptyset$
2. For $i \leftarrow 1$ to n
   1. Falls ($\text{OPTIMUM}(W \setminus \{w_i\}, P \setminus \{p_i\}, B) = opt$, setze $W \leftarrow W \setminus \{w_i\}, P \leftarrow P \setminus \{p_i\}$.
   2. Sonst $I \leftarrow I \cup \{i\}$.

Ausgabe: I

Korrektheit:

- Invariante vor i-tem Durchlauf: $\exists J \subseteq \{i, \ldots, n\}$: $I \cup J$ ist optimal.
- i wird nur dann in I aufgenommen, falls I zu optimaler Teilmenge erweitert werden kann.

- **Laufzeit:** $\mathcal{O}(n \cdot T(\text{OPTIMUM})) = \mathcal{O}(n \cdot \log(\sum_{i=1}^{n} p_i) \cdot T(M))$.
- D.h. Laufzeit ist polynomiell, falls $T(M)$ polynomiell ist.

Sprache Zusammengesetzt

$\textsc{Zusammengesetzt} := \{N \in \mathbb{N} \mid N = ab \text{ mit } a, b \in \mathbb{N},\ a, b \geqslant 2\}$

Satz

$\textsc{Zusammengesetzt} \in \mathcal{NP}$.

Beweis:

Algorithmus Polynomieller Verifizierer für $\textsc{Zusammengesetzt}$

Eingabe: (N, c) mit $c = (p, q) \in \{2, \ldots, N-1\}^2$

1. Berechne $p \cdot q$. Falls $p \cdot q = N$, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Laufzeit:

- Eingabelänge: $|N| = \Theta(\log N)$
- Laufzeit: $\mathcal{O}(\log^2 N)$, d.h. polynomiell in der Eingabelänge.

$\mathcal{P}$ versus $\mathcal{NP}$

Satz

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.

$$
\begin{aligned}
L \in \mathcal{P} \quad &\Rightarrow \quad \exists \text{ DTM } M, \text{ die } L \text{ in polynomieller Laufzeit entscheidet.} \\
&\Rightarrow \quad \exists \text{ DTM } M, \text{ die stets hält und genau die Eingaben } w \in L \\
&\qquad \text{in Laufzeit polynomiell in } |w| \text{ akzeptiert.} \\
&\Rightarrow \quad \exists \text{ DTM } V, \text{ die stets hält und genau die Eingaben } (w, c) \text{ mit} \\
&\qquad w \in L, c = \epsilon \text{ in Laufzeit polynomiell in } |w| \text{ akzeptiert.} \\
&\qquad \text{Dabei ignoriert } V \text{ die Eingabe } c \text{ und verwendet } M \text{ auf } w. \\
&\Rightarrow \quad L \in \mathcal{NP}.
\end{aligned}
$$

- **Großes offenes Problem:** Gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$?

Nichtdeterministische Turingmaschinen

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(S)$ die Potenzmenge einer Menge S.

Definition Nichtderministische Turingmaschine

Eine *nicht-deterministische Turingmaschine (NTM)* ist ein Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \sqcup, E)$ wobei

- $Q, \Sigma, \Gamma, s, \sqcup, E$ sind wie bei DTM definiert.
- δ ist nun eine Relation, nicht eine Funktion, i.e. $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, N, R\})$

Falls für jeden (q, a) es nur ein Element $\big((q, a), (q' \times a' \times e)\big)$ mit $e \in \{L, N, R\}$ in δ gibt, dann ist δ eine Funktion und die TM ist deterministisch.

- Bsp: δ enthält $(q, a) \times (q_1, a_1, L)$, und $(q, a) \times (q_2, a_2, R)$.
- NTM besitzt 2 Wahlmöglichkeiten für den Zustandsübergang.
- Beschränken uns oBdA auf NTMs mit $\leqslant 2$ Wahlmöglichkeiten.

Berechnungsbaum

- Seien die Konfigurationen einer NTM Knoten in einem Berechnungsbaum.
  - Die Startkonfiguration bildet den Wurzelknoten.
  - Mögliche Nachfolgekonfigurationen bilden Kinderknoten.
- Pfade heißen Berechnungspfade der NTM.
- Betrachten nur NTMs mit Berechnungspfaden endlicher Länge.
- Ein Berechnungpfad heißt akzeptierend, falls er in q_a endet.

Definition Akzeptierte Sprache einer NTM

Sei N eine NTM.

- N akzeptiert Eingabe $w \Leftrightarrow \exists$ akzeptierenden Berechnungspfad im Berechnungsbaum von N bei Eingabe w.
- Die von N akzeptierte Sprache $L(N)$ ist definiert als $L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid N \text{ akzeptiert die Eingabe } w.\}$.

Die Laufzeit einer NTM

Definition Laufzeit einer NTM

Sei N eine DTM mit Eingabe w.

- $T_N(w) :=$ **maximale** Anzahl Rechenschritte von N auf w,
  d.h. $T_N(w)$ ist die Länge eines längsten Berechnungspfades.
- $T_N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $T_N(n) := \max\{T_N(w) \mid w \in \Sigma^{\leq n}\}$
  heißt *Laufzeit* oder Zeitkomplexität von N.

- Wir definieren die Klasse NTIME für NTMs analog zur Klasse DTIME für DTMs.

Definition NTIME

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion.

$$\mathrm{NTIME}(t(n)) := \{L \mid L \text{ wird von NTM in Laufzeit } \mathcal{O}(t(n)) \text{ entschieden.}\}$$

NTM, die RUCKSACK entscheidet

Algorithmus NTM für RUCKSACK

Eingabe: W, P, B, k

1. Erzeuge nichtdeterministisch einen Zeugen $I \subseteq [n]$.
2. Falls $\sum_{i \in I} w_i \leq B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geq k$, akzeptiere.
3. Sonst lehne ab.

- D.h. NTM erzeugt sich im Gegensatz zum Verifizierer ihren Zeugen I selbst.
- Laufzeit: Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(n \cdot \log(\max_i\{w_i, p_i\}))$.
- D.h. die Laufzeit ist polynomiell in der Eingabelänge.

$\mathcal{NP}$ mittels NTMs

Satz

$\mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Sprachen, die von einer NTM in polynomieller Laufzeit entschieden wird, d.h.

$$\mathcal{NP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k).$$

Zeigen:

$\exists$ polynomieller Verifizierer für L

$\Leftrightarrow$ $\exists$ NTM N, die L in polynomieller Laufzeit entscheidet.

Verifizierer $\Rightarrow$ NTM

"$\Rightarrow$": Sei V ein Verifizierer für L mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^k)$ für ein festes k.

Algorithmus NTM N für L

Eingabe: w mit $|w| = n$.

1. Erzeuge nicht-deterministisch einen Zeugen c mit $|c| = \mathcal{O}(n^k)$.
2. Simuliere V mit Eingabe (w, c).
3. Falls V akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

- Korrektheit:
  $$w \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \text{ mit } |c| = \mathcal{O}(n^k) : V \text{ akzeptiert } (w, c).$$
  $$\Leftrightarrow \quad N \text{ akzeptiert die Eingabe } w \text{ in Laufzeit } \mathcal{O}(n^k).$$
- Damit entscheidet N die Sprache L in polynomieller Laufzeit.

NTM $\Rightarrow$ Verifizierer

"$\Leftarrow$: Sei N eine NTM, die L in Laufzeit $\mathcal{O}(n^k)$ entscheidet.

Algorithmus Verifizierer

Eingabe: w, c

1. c ist Codierung eines Berechnungspfades von N bei Eingabe w.
2. Simuliere N auf Eingabe w auf dem Berechnungspfad c.
3. Falls N akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Korrektheit:

$$\begin{aligned} w \in L &\Leftrightarrow \exists \text{ akzeptierender Berechnungspfad } c \text{ von } N \text{ für } w \\ &\Leftrightarrow V \text{ akzeptiert } (w, c). \end{aligned}$$

Laufzeit:

- Längster Berechnungspfad von N besitzt Länge $\mathcal{O}(n^k)$.
- D.h. die Gesamtlaufzeit von V ist ebenfalls $\mathcal{O}(n^k)$.

Boolesche Formeln

Definition Boolesche Formel

- Eine Boolesche Variable x_i kann Werte aus $\{0, 1\}$ annehmen, wobei $0 \cong$ falsch und $1 \cong$ wahr.
- Jede Boolesche Variable x_i ist eine Boolesche Formel.
- Sind ϕ, ψ Boolesche Formeln, so auch $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi$.
- Operatoren geordnet nach absteigender Priorität: $\neg, \wedge, \vee$.
- ϕ ist erfüllbar $\Leftrightarrow \exists$ Belegung der Variablen in ϕ mit $\phi = 1$.

Bsp:

- $\phi = \neg(x_1 \vee x_2) \wedge x_3$ ist erfüllbar mit $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$.
- $\psi = x_1 \wedge \neg x_1$ ist eine nicht-erfüllbare Boolesche Formel.

Satisfiability SAT

Definition SAT

SAT $:= \{\phi \mid \phi$ ist eine erfüllbare Boolesche Formel.$\}$

Codierung von ϕ:

- Codieren Variable x_i durch $\mathrm{bin}(i)$.
- Codieren ϕ über dem Alphabet $\{0, 1, (,), \neg, \wedge, \vee\}$.

SAT ist polynomiell verifizierbar.

Satz

SAT$\in \mathcal{NP}$.

Beweis

Algorithmus Polynomieller Verifizierer

EINGABE: $(\phi(x_1, \ldots, x_n), \mathbf{c})$, wobei $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \{0,1\}^n$.

- Falls $\phi(c_1, \ldots, c_n) = 1$, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Korrektheit:

- $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in$ SAT $\Leftrightarrow \exists$ Belegung $\mathbf{c} \in \{0,1\}^n : \phi(\mathbf{c}) = 1$

Laufzeit:

- Belegung von ϕ mit $\mathbf{c}$: $\mathcal{O}(|\phi|)$ auf RAM.
- Auswertung von ϕ auf $\mathbf{c}$: $\mathcal{O}(|\phi|^2)$ auf RAM.

Simulation von NTMs durch DTMs

Satz Simulation von NTM durch DTM

Sei N eine NTM, die die Sprache L in Laufzeit $t(n)$ entscheidet. Dann gibt es eine DTM M, die L in Zeit $\mathcal{O}(2^{t(n)})$ entscheidet.

Sei $B(w) = (V, E)$ der Berechnungsbaum von N bei Eingabe w.

Algorithmus DTM M für L

1. Führe Tiefensuche auf $B(w)$ aus.
2. Falls akzeptierender Berechnungspfad gefunden wird, akzeptiere.
3. Sonst lehne ab.

- Tiefensuche auf $B(w)$ benötigt Laufzeit $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(|V|)$.
- Berechnungspfade in $B(w)$ besitzen höchstens Länge $t(n)$.
- D.h. $B(w)$ besitzt höchstens $2^{t(n)}$ Blätter.
- Damit besitzt $B(w)$ höchstens $|V| \leqslant 2 \cdot 2^{t(n)} - 1$ viele Knoten.
- D.h. die Gesamtlaufzeit ist $\mathcal{O}(2^{t(n)})$.

Polynomielle Reduktion

Definition Polynomiell berechenbare Funktion

Sei Σ ein Alphabet und $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. Die Funktion f heißt polynomiell berechenbar gdw. eine DTM M existiert, die für jede Eingabe w in Zeit polynomiell in $|w|$ den Wert $f(w)$ berechnet.

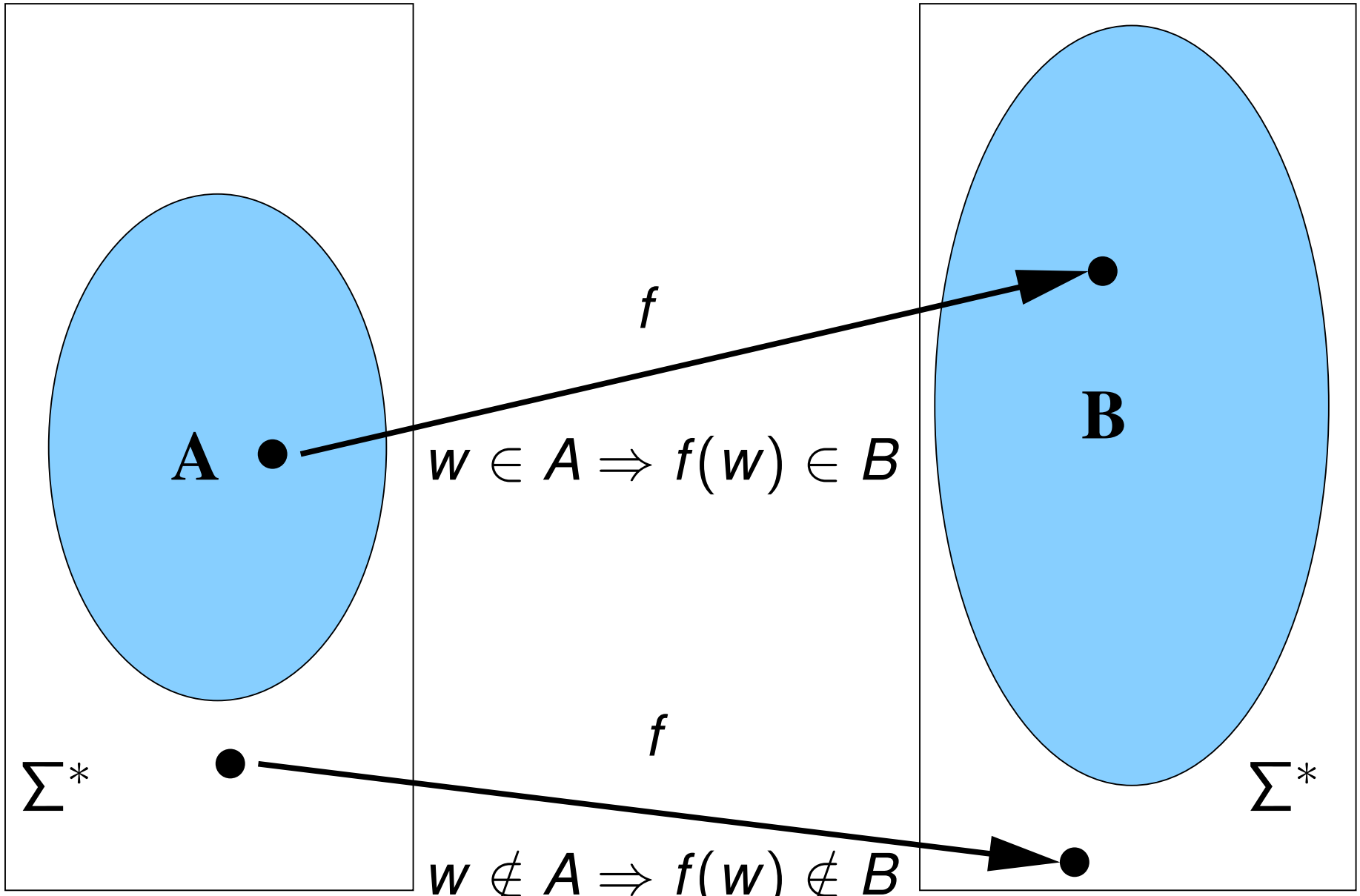
Definition Polynomielle Reduktion

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Sprachen. A heißt *polynomiell reduzierbar auf* B, falls eine polynomiell berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert mit

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$

Wir schreiben $A \leqslant_p B$ und bezeichen f als *polynomielle Reduktion*.

Graphische Darstellung $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$



A ist nicht schwerer als B.

Satz $\mathcal{P}$-Reduktionssatz

Sei $A \leqslant_p B$ und $B \in \mathcal{P}$. Dann gilt $A \in \mathcal{P}$.

- Wegen $B \in \mathcal{P}$ existiert DTM M_B, die B in polyn. Zeit entscheidet.
- Wegen $A \leqslant_p B$ existiert DTM M_f, die f in polyn. Zeit berechnet.

Algorithmus DTM M_A für A

Eingabe: w

1. Berechne $f(w)$ mittels M_f auf Eingabe w.
2. Falls M_B auf Eingabe $f(w)$ akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Korrektheit:

- M_A akzeptiert $w \Leftrightarrow M_B$ akzeptiert $f(w) \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow w \in A$.

Laufzeit:

- $T(M_A) = \mathcal{O}(T(M_f) + T(M_B))$, d.h. polynomiell in $|w|$.

Transitivität polynomieller Reduktionen

Satz Transitivität von $\leqslant_p$

Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ Sprachen mit $A \leqslant_p B$ und $B \leqslant_p C$. Dann gilt $A \leqslant_p C$.

- Sei f die polynomielle Reduktion von A auf B, d.h.
$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$
- Sei g die polynomielle Reduktion von B auf C, d.h.
$$v \in B \Leftrightarrow g(v) \in C \quad \text{für alle } v \in \Sigma^*.$$
- Dann gilt insbesondere $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow g(f(w)) \in C$.
- Damit ist die Komposition $g \circ f$ eine Reduktion von A auf C.
- $g \circ f$ kann in polynomieller Zeit berechnet werden durch Hintereinanderschaltung der polynomiellen DTMs M_f und M_g für f und g:
  - $k, k', \tilde{k} \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $T(M_f(w)) = \mathcal{O}(|w|^k)$, $T(M_g(v)) = \mathcal{O}(|v|^{k'})$ und $|f(w)| = \mathcal{O}(|w|^{\tilde{k}})$ für alle w, v.
  - Also für $v = f(w)$ ist es $T(M_g \circ M_f(w)) = \mathcal{O}(|w|^k) + \mathcal{O}((|w|^{\tilde{k}})^{k'})$, d.h. polynomiell.