Diskrete Mathematik II

Roberto Avanzi (nach Alexander May)

Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Sommersemester 2010

Organisatorisches

- Vorlesung: **Mo 12-14** in HIA , **Di 10-11** in ND 2/99
  (3+1 SWS, 6.75 CP)
- Übung: **Di 11-13** in NA 5/64
  - Assistent: **Enrico Thomae**, Korrektor: **Ilya Ozerov**
  - Übung ist zweiwöchentlich: gerade/ungerade Woche.
  - Übungsaufgaben werden korrigiert und benotet.
  - Musterlösungen werden veröffentlicht.
  - Gruppenabgaben bis 3 Personen.
  - Bonussystem:
    bis 10%, bzw etwa 2/3-Notenstufe
    Gilt nur, wenn man die Klausur besteht!
    Wird sonst (ab 40% der Klausur) nun anteilig berechnet.
- Klausur: voraussichtlich Ende August.

Themengebiete

1. Kodierungstheorie
   - Komprimierende Codes
   - Fehlererkennende Codes
   - Ausfalltolerante Codes
   - + Anwendungen: Kommunikation, Internet, CD, Kryptographie
2. Algorithmische Zahlentheorie
   - Quadratische Reste
   - + Anwendungen: Zufallszahlengenerator, Identity-Based Encryption
3. Elliptische Kurven
   - Arithmetik
   - + Anwendung: Kryptographie
4. Komplexitätstheorie
   - Klassen P und NP
   - Reduktionen
   - + Anwendung: Sicherheitsbeweise in der Kryptographie

Weiterführende Referenzen

- Steven Roman, “Introduction to Coding and Information Theory”, Springer Verlag, 1996
- Michael R. Garey, David S. Johnson, “Computers and Intractability”, Freeman, 2000
- J. Blömer, “Einführung in Algorithmen und Komplexität”, Vorlesungsskript Universität Paderborn, 2002
- N. Koblitz, “A Course in Number Theory and Cryptography”, Springer Verlag, 1994
- R. Avanzi, Skript zur Vorlesung “Zahlentheorie”.

1. Woche
Einführung in die Codierungstheorie, Definition Codes, Präfixcode, kompakte Codes

Unser Modell

- Shannon 1948: Informationstheorie und Mathematik der Kommunikation
- Hamming 1950: Erste Arbeit über fehlerkorrigierende Codes

Modell:

Sender $\rightarrow$ Codierer $\rightarrow$ Kanal $\rightarrow$ Decodierer $\rightarrow$ Empfänger

- Kanal ist bandbreitenbeschränkt (Kompression)
- Kanal ist fehleranfällig (Fehlerkorrektur)
  - Bits können ausfallen: $0 \mapsto \epsilon$, $1 \mapsto \epsilon$
  - Bits können kippen: $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$

Motivierendes Bsp: Datenkompression

Szenario:

- Kanal ist **fehlerfrei**.
- Übertragen gescannte Nachricht:
  Wahrscheinlichkeiten: 99% weißer, 1% schwarzer Punkt.
- Weiße Punkte erhalten Wert 0, schwarze Wert 1.

Codierer:

- Splitten Nachricht in Blocks der Größe 10.
- Wenn Block x=0000000000, codiere mit 0, sonst mit 1x.
- 1 dient als Trennzeichen beim Decodieren.

Decodierer:

- Lese den Code von links nach rechts.
- Falls 0, decodiere 0000000000.
- Falls 1, übernehme die folgenden 10 Symbole.

Erwartete Codelänge

Sei $q := \mathcal{W}s[\text{Block ist } 0000000000] = (0.99)^{10} \geq 0.9$.
Sei Y Zufallsvariable für die Codewortlänge eines 10-Bit Blocks:

$$E[Y] = \sum_{y \in \{0,1x\}} |y| \cdot \mathcal{W}s(Y = y) = 1 \cdot q + 11 \cdot (1 - q) = 11 - 10q.$$

- D.h. erwartete Länge der Codierung eines 10-Bit Blocks ist
$$11 - 10q \leq 2 \text{ Bit}.$$
- Datenkompression der Nachricht auf 20%.
- Können wir noch stärker komprimieren?
- Entropie wird uns Schranke für Komprimierbarkeit liefern.

Exkurs: Weitere Motivation

Skalarmultiplikation, i.e. für $g \in G$ Gruppe und $n \in \mathbb{Z}$, rechne das Vielfache $n \cdot g$ von g.

Interessant für Kryptographie (RSA, Elliptische Kurven).

Es gibt Methoden, die basieren auf Datenkompression.

Idee: Betrachte n als Bitfolge (binäre Darstellung), und komprimiere diese – interpretiere diese Kompression als Folge von Operationen, deren End-Resultat $n \cdot g$ ist.

Bocharova-Kudryasoul, und Yacobi – leider werden wir dies nicht in der VL betrachten.

Ausblick: fehlerkorrigierende Codes

Szenario: Binärer symmetrischer Kanal

- Bits 0,1 kippen mit Ws $p, p < \frac{1}{2}$ zu 1,0. (Warum $< \frac{1}{2}$?)
- Korrekte Übertragung $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ mit Ws $1 - p$.
- In unserem Beispiel $p = 0.1$.

Codierer:

- Verdreifache jedes Symbol, d.h. $0 \mapsto 000$, $1 \mapsto 111$
- Repetitionscode der Länge 3.

Decodierer:

- Lese den Code in 3er-Blöcken.
- Falls mindestens zwei Symbole 0 sind, decodiere zu 0.
- Sonst decodiere zu 1.

Ws Decodierfehler

Symbol wird falsch decodiert, falls mind. zwei der drei Bits kippen.

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}s(\text{Bit wird falsch decodiert}) \\ = \; & \mathcal{W}s(\text{genau 2 Bits kippen}) + \mathcal{W}s(\text{genau 3 Bits kippen}) \\ = \; & 3 * p^2 * (1-p) + p^3 = 3 * 10^{-2} * (1 - 10^{-1}) + 10^{-3} \end{aligned}$$

- Ohne Codierung Fehlerws von 0.1.
- Mit Repetitionscode Fehlerws von ≈ 0.03.
- Nachteil: Codierung ist dreimal so lang wie Nachricht.
- **Ziel:**
  Finde guten Tradeoff zwischen Fehlerws und Codewortlänge.

Ausblick: fehlertolerante Codes

Szenario: Binärer Ausfallkanal

- Bits 0,1 gehen mit Ws p, $p < \frac{1}{2}$ verloren,
  d.h. $0 \mapsto \epsilon$ bzw. $1 \mapsto \epsilon$.
- Korrekte Übertragung $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ mit Ws $1 - p$.
- In unserem Beispiel $p = 0.1$.

Codierer: Repetitionscode der Länge 3.

Decodierer:

- Lese den Code in 3er-Blöcken xyz
- Ausgabe: x.
  Falls $y \neq x$, sei yz Anfang vom nächsten Block
  also lese nur ein extra Zeichen, um nächsten 3er-Block zu bilden
  Falls $y = x$ und $z \neq x$, sei z Anfang vom nächsten Block
  also lese zwei extra Zeichen, um nächsten 3er-Block zu bilden
  Falls $x = y = z$, bilde nächsten 3er-Block aus drei frischen Codezeichen

Fehler beim Decodieren: Alle drei Symbole gehen verloren.

- $\mathcal{W}s(\text{Bit kann nicht decodiert werden}) = p^3 = 0.001$.
- Fehlerws kleiner beim Ausfallkanal als beim sym. Kanal.

Definition Code

- Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Menge von Symbolen a_i
- Nachricht $m \in A^*$

Definition Code

Sei A ein Alphabet. Eine (binäre) *Codierung C des Alphabets A* ist eine injektive Abbildung

$$\begin{aligned} C: \quad & A \to \{0,1\}^* \\ & a_i \mapsto C(a_i). \end{aligned}$$

Die *Codierung einer Nachricht* $m = a_{i_1} \ldots a_{i_\ell} \in A^*$ definieren wir als

$$C(m) = C(a_{i_1}) \ldots C(a_{i_\ell}) \quad \text{(Erweiterung von } C \text{ auf } A^*).$$

Die Abbildung C heißt *Code*.

Bezeichnungen Code

- Die Elemente $c_i := C(a_i)$ bezeichnen wir als *Codeworte*.
- Wir bezeichnen sowohl die Abbildung von Nachrichten auf Codeworte als auch die *Menge der Codeworte* mit dem Buchstaben C.
- Falls $C \subseteq \{0,1\}^n$ spricht man von einem *Blockcode* der Länge n. In einem Blockcode haben alle Codeworte die gleiche Länge.

Entschlüsselbarkeit von Codes

Szenario: Datenkompression in fehlerfreiem Kanal

Definition eindeutig entschlüsselbar

Ein Code heißt eindeutig entschlüsselbar, falls jedes Element aus $\{0,1\}^*$ Bild höchstens einer Nachricht ist. D.h. die Erweiterung der Abbildung C auf A^* muss injektiv sein.
Mit anderen Worten, ein Code C heißt *eindeutig entschlüsselbar* wenn füer jede Zeichenkette $x \in \{0,1\}^*$ höchstens eine Folge von Codeworten $c_1, c_2, \ldots, c_r$ existiert, derart dass $x = c_1 c_2 \ldots c_r$

Definition Präfixcode (eigentlich: präfixfreier Code)

Ein Code $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ heißt Präfixcode, falls es keine zwei Codeworte $c_i \neq c_j$ gibt mit

$$c_i \text{ ist Präfix (Wortanfang) von } c_j$$

i.e.

$$c_j = c_i s \quad \text{mit} \quad s \in \{0,1\}^* \ .$$

Sofortige Entschlüsselbarkeit

Definition Sofort entschlüsselbar

Ein Code C heißt *sofort entschlüsselbar* wenn ein Codewort lässt sich sofort dekodieren, sobald seine Zeichen bekannt sind, i.e. falls

$$x = x_1 x_2 \dots x_t x_{t+1} \dots$$

und t der kleinste Index ist, derart dass $c = x_1 x_2 \dots x_t$ ein Codewort ist, dann ist c die einzige Mögliche Dekodiertung des Anfangs von x und das nächste Codewort fängt mit x_{t+1} an.

Beobachtung

Es ist klar, dass

Präfixcode $\Leftrightarrow$ Sofort entschlüsselbar $\Rightarrow$ Eindeutig entschlüsselbar

Beispiel

	a_1	a_2	a_3
C_1	0	0	1
C_2	0	1	00
C_3	0	01	011
C_4	0	10	11

- C_1 ist kein Code, da $C_1 : A \to \{0,1\}^*$ nicht injektiv.
- C_2 ist nicht eindeutig entschlüsselbar, da $C_2 : A^* \to \{0,1\}^*$ nicht injektiv.
- C_3 ist eindeutig entschlüsselbar, aber kein Präfixcode.
- C_4 ist ein Präfixcode.

Weitere Beispiele (nicht unbedingt binär)

- Vollständige internationale Rufnummer: Präfixcode
- Morse Code ist kein Präfixcode, da
  - $A \mapsto \cdot -$
  - $L \mapsto \cdot - \cdot -$

  Aber: mit Pausen wird eindeutig entschlüsselbar, da Pausen wirken als Terminatoren
- UTF-8 ist Präfix code
- Die *Secondary Synchronization Codes* im UMTS Standard

Präfixcodes sind eindeutig entschlüsselbar.

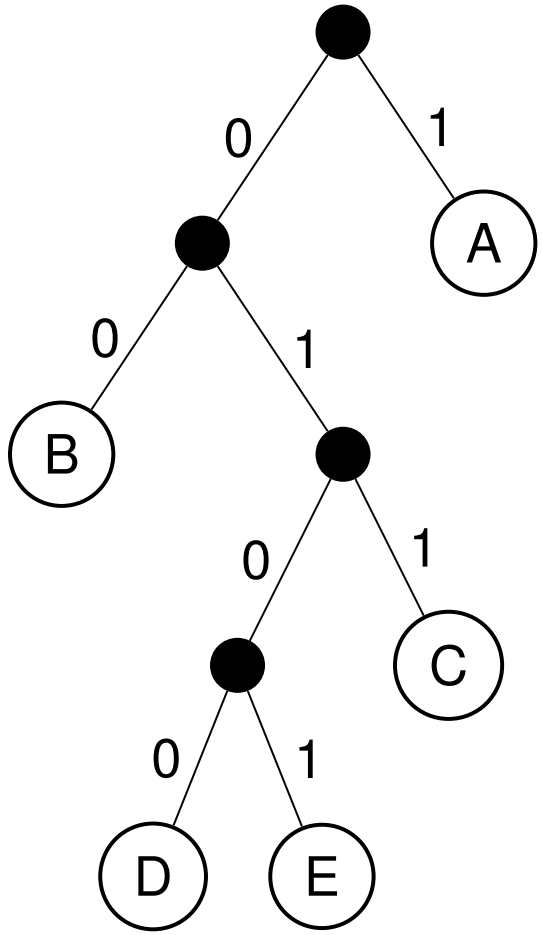
Satz Präfixcode eindeutig entschlüsselbar

Sei $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ ein Präfixcode. Dann kann jede codierte Nachricht $C(m)$ in Zeit $\mathcal{O}(|C(m)|)$ eindeutig zu m decodiert werden.

- Zeichne binären Baum
  - Kanten erhalten Label 0 für linkes Kind, 1 für rechtes Kind.
  - Codewort $c_i = c_{i_1} \ldots c_{i_k}$ ist Label des Endknoten eines Pfads von der Wurzel mit den Kantenlabeln $i_1, \ldots, i_n$
- **Präfixeigenschaft:** Kein einfacher Pfad von der Wurzel enthält zwei Knoten, die mit Codeworten gelabelt sind.
- Codewort c_i, oder das Ursprüngliche Alphabetsymbol, ist Blatt in Tiefe c_i

Beispiel: Code und entsprechender binärer Baum

$$C : \begin{cases} A \mapsto 1 \\ B \mapsto 00 \\ C \mapsto 011 \\ D \mapsto 0100 \\ E \mapsto 0101 \end{cases} \Rightarrow$$



Algorithmus Decodierung Präfix

Algorithmus Decodierung Präfix

1. Lese $C(m)$ von links nach rechts.
2. Starte bei der Wurzel. Falls 0, gehe nach links. Falls 1, gehe nach rechts.
3. Falls Blatt mit Codewort $c_i = C(a_i)$ erreicht, gib a_i aus und iteriere.

Laufzeit: $\mathcal{O}(|C(m)|)$

Woher kommen die Nachrichtensymbole?

Modell

- *Quelle Q* liefert Strom von Symbolen aus A.
- Quellwahrscheinlichkeit: $\mathcal{W}s(\text{ Quelle liefert } a_i) = p_i$
- Ws p_i ist unabhängig von der Zeit und vom bisher produzierten Strom (gedächtnislose Quelle)
- X_i: Zufallsvariable für das Quellsymbol an der i-ten Position im Strom, d.h.

$$\mathcal{W}s(X_i = a_j) = p_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \text{ und alle } i.$$

Ziel: Codiere Elemente a_j mit großer Ws p_j mit kleiner Codewortlänge.

Kompakte Codes

Definition Erwartete Codewortlänge

Sei Q eine Quelle mit Alphabet $A = a_1, \ldots, a_n$ und Quellwahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$. Die Größe

$$E(C) := \sum_{i=1}^{n} p_i |C(a_i)|$$

bezeichne die erwartete Codewortlänge.

Definition Kompakter Code

Ein Code C heißt kompakt bezüglich einer Quelle Q, falls er *minimale erwartete Codewortlänge* besitzt.

2. Woche
Eindeutige Entschlüsselbarkeit, Sätze von Kraft und McMillan, Huffmancodierung

Zwei Beispiele

$$C: \begin{cases} a & \mapsto & 0 \\ b & \mapsto & 01 \\ c & \mapsto & 011 \\ d & \mapsto & 0111 \end{cases} \quad \text{und} \quad C': \begin{cases} a & \mapsto & 0 \\ b & \mapsto & 10 \\ c & \mapsto & 110 \\ d & \mapsto & 1110 \end{cases}$$

Beide Codes eindeutig entschlüsselbar.

Der erste ist nicht sofort entschlüsselbar.

Der zweite ist ein Präfixcode, d.h. sofort entschlüsselbar.

Aber, sie sind die Spiegelung von einenander. Vielleicht sollen wir nicht nur analysieren, wie Codeworte anfangen (Präfixe), aber auch wie sie enden ($\Rightarrow$ Suffixe), um die eindeutige Entschlüsselbarkeit zu charakterisieren.

Wann sind Codes eindeutig entschlüsselbar?

Definition Suffix

Sei C ein Code. Eine Folge $s \in \{0,1\}^*$ heißt Suffix in C falls eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\exists c_i, c_j \in C : c_i = c_j s$ oder
2. $\exists c \in C$ und einen Suffix s' in C: $s' = cs$ oder
3. $\exists c \in C$ und einen Suffix s' in C: $c = s's$.

Bedeutung der Bedingungen

- Bedingung 1: Codewort c_j lässt sich zu Codewort c_i erweitern.
- Bedingung 2: Codewort c lässt sich zu Suffix s' erweitern.
- Bedingung 3: Suffix s' lässt sich zu Codewort c erweitern.

Effiziente Berechnung von Suffixen

Algorithmus Berechnung Suffix

EINGABE: $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$

1. Setze $S := \emptyset$, $T := \emptyset$.
2. Für alle $c_i, c_j \in C \times C$: Falls es ein $s \in \{0,1\}^*$ gibt mit $c_i = c_j s$, füge s in S und T ein.
3. Solange $T \neq \emptyset$
   1. Entferne ein beliebiges s' aus T.
   2. Für alle $c \in C$: Falls es ein $s \in \{0,1\}^* \setminus S$ gibt mit

      $$s' = c' s \quad \text{oder}$$
      $$c = s' s \,,$$

      dann füge s zu S und T hinzu.

AUSGABE: Menge S der Suffixe von C

Laufzeit Suffixberechnung

Laufzeit:

- Schritt 2: $\mathcal{O}(n^2)$ Codewortpaare
- Suffixlänge ist durch $\max_i\{|c_i|\}$ beschränkt.
- Es kann höchstens $n \cdot \max_i\{|c_i|\}$ Suffixe geben.
- Schritt 3: $\mathcal{O}(n^2 \cdot \max_i\{|c_i|\})$
- **Polynomiell in der Eingabelänge**: n, $max_i\{|c_i|\}$

Beispiele Suffixberechnung

- Code $C_2 = \{0, 1, 00\}$
  - Suffix $s_1 = 0$, denn $c_3 = c_1 0$.
- Code $C_3 = \{0, 01, 011\}$
  - Suffix $s_1 = 1$, denn $c_2 = c_1 1$.
  - Suffix $s_2 = 11$, denn $c_3 = c_1 11$.
- Code $C_4 = \{0, 10, 11\}$
  - Keine Suffixe, da Präfixcode.
- Code $C_5 = \{1, 110, 101\}$
  - Suffix $s_1 = 10$, denn $c_2 = c_1 10$.
  - Suffix $s_2 = 01$, denn $c_3 = c_1 01$.
  - Suffix $s_3 = 0$, denn $s_1 = c_1 0$.
  - Suffix $s_4 = 1$, denn $c_3 = s_1 1$.

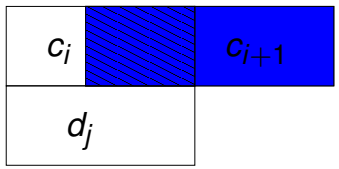
Kriterium für eindeutig entschlüsselbar

Satz Eindeutig entschlüsselbar

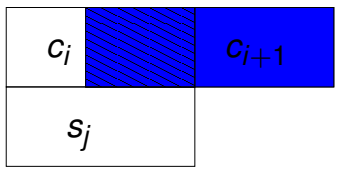
C ist ein eindeutig entschlüsselbarer Code $\Leftrightarrow$ Kein Suffix ist Codewort in C.

z.z.: C nicht eindeutig entschlüsselbar $\Rightarrow$ Suffix ist Codewort

- Zwei gleiche Folgen $c_1 \ldots c_n$ und $d_1 \ldots d_m$ von verschiedenen Codeworten
- Fall 1: Codewort c_i lässt sich zu d_j erweitern

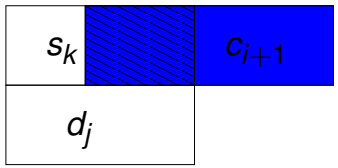


- Fall 2: Codewort c_i lässt sich zu Suffix s_j erweitern



Suffix ist Codewort

- Fall 3: Suffix s_k lässt sich zu Codewort d_j erweitern



- Nach jedem Schritt beginnt der konstruierte Suffix mit einem Codewortpräfix.
- Der zuletzt konstruierte Suffix ist identisch mit dem letzten Codewort von beiden Sequenzen.

Rückrichtung

z.z.: Suffix s ist ein Codewort $\Rightarrow$ C ist nicht eindeutig entschlüsselbar

- Suffix s ist aus Anwendungen der drei Regeln entstanden.
- Berechne die Kette zurück, aus der s entstanden ist.
  - Setze String $c^* \leftarrow s$. Iteriere:
  - 1. Fall $c_i = c_j s$: $c^* \leftarrow c_j c^*$, terminiere.
  - 2. Fall $s' = cs$: $c^* \leftarrow cc^*$, $s \leftarrow s'$.
  - 3. Fall $c = s's$: $c^* \leftarrow s'c^*$, $s \leftarrow s'$.
- Kette muss mit 1. Fall $c_i = c_j s'$ terminieren.
- Zwei verschiedene Entschlüsselungen:
  Eine beginnt mit c_i, die andere mit c_j.
- Beide sind gültig, da der letzte Suffix ein Codewort ist.

Beispiel: Für $C = 1, 110, 101$ erhalten wir für den Suffix 1 den String $c^* = 1101$ mit gültigen Decodierungen $1|101$ und $110|1$.

Sätze von Kraft und McMillan

Satz von Kraft (1949)

Ein Präfixcode C für das Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit Codierungslängen $|C(a_j)| = \ell_j$ existiert gdw

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{\ell_j}} \leqslant 1 \ .$$

Diese Ungleichung heißt *Krafts Ungleichung*.

Satz von McMillan (1956)

Falls der Code C für das Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit Codierungslängen $|C(a_j)| = \ell_j$ eindeutig entschlüsselbar ist, dann

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{\ell_j}} \leqslant 1 \ .$$

Präfixcodes genügen

Korollar

Ein Präfixcode C existiert gdw es einen eindeutig entschlüsselbaren Code C mit denselben Codierungslängen gibt.

- Wir zeigen den Ringschluss für:
  $\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leqslant 1 \Rightarrow$ Präfix $\Rightarrow$ Eindeutig entschlüsselbar

  (Präfix $\Rightarrow$ Eindeutig entschlüsselbar: letzte Vorlesung)
- Gegeben sind Codierungslängen ℓ_j.
- Gesucht ist ein Präfixcode mit $\ell_j = |C(a_j)|$.
- Definiere $\ell := \max\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$, $n_i :=$ Anzahl ℓ_j mit $\ell_j = i$.

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} = \sum_{j=1}^{\ell} n_j 2^{-j} \leqslant 1.$$

Beweis: $\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leqslant 1 \Rightarrow$ Präfix

Induktion über ℓ:

- **IV** $\ell = 1$**:** $n_1 \leqslant 2 \Rightarrow$ Präfixcode $C \subseteq \{0,1\}$, max 2 Codeworte, konstruierbar.
- **IA** Falls $\sum_{i=1}^{\ell-1} n_i/2^i \leqslant 1$ dann $\exists$ Präfixcode mit diesen Codewortlängen.
- **IS** $\ell - 1 \to \ell$**:** Sei $\sum_{i=1}^{\ell} n_i/2^i \leqslant 1$, d.h. $n_\ell \leqslant 2^\ell - n_1 2^{\ell-1} - n_2 2^{\ell-2} - \ldots n_{\ell-1} 2$.
  $2^\ell - n_1 2^{\ell-1} - n_2 2^{\ell-2} - \ldots n_{\ell-1} 2$ ist der max. Wert von n_ℓ.
- Aus **IA** $\exists$ Präfixcode C' mit n_i Worten der Länge i, $i = 1, \ldots, \ell - 1$.
- Anzahl der Worte der Länge ℓ: 2^ℓ
- Wir zählen die durch C' ausgeschlossenen Worte der Länge ℓ.
  Sei $c_i \in C'$ mit Länge ℓ_i. Dann enthalten alle $c_i s \in \{0,1\}^\ell$ mit beliebigem $s \in \{0,1\}^{\ell-\ell_i}$ den Präfix c_i.
  - Durch Präfixe der Länge 1 ausgeschlossene Worte: $n_1 \cdot 2^{\ell-1}$ — Menge M_1;
  - Durch Präfixe der Länge 2 ausgeschlossene Worte: $n_2 \cdot 2^{\ell-2}$ — Menge M_2;

  $\vdots$
  - Durch Präfixe der Länge $\ell - 1$ ausgeschlossene Worte: $n_{\ell-1} \cdot 2$ — Menge $M_{\ell-1}$.

  N.B. Die Mengen M_i sind paarweise disjunkt.

$\Rightarrow$ wir können bis $2^\ell - (n_1 2^{\ell-1} + \cdots + n_{\ell-1} 2)$ Symbole mit den verbleibenden Worten der Länge ℓ codieren, und die Präfixcode-Eigenschaft erhalten.

- Das dies der max. Wert von n_ℓ ist, dies ist immer möglich.

Eindeutig entschlüsselbar $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leqslant 1$

- Sei C eindeutig entschlüsselbar mit $C(a_j) = \ell_j$, $\ell = max_j\{\ell_j\}$.
- Wählen $r \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachten

$$\left(\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j}\right)^r = \sum_{i=1}^{r\ell} m_i 2^{-i}$$

- Analog zum Beweis zuvor: m_i = Anzahl Strings aus $\{0,1\}^i$, die sich als Folge von r Codeworten schreiben lässt.
- C eindeutig entschlüsselbar: Jeder String aus $\{0,1\}^i$ lässt sich als höchstens eine Folge von Codeworten schreiben, d.h. $m_i \leqslant 2^i$.
- Damit gilt $\sum_{i=1}^{r\ell} m_i 2^{-i} \leqslant r\ell \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leqslant (r\ell)^{\frac{1}{r}}$
- Für $r \to \infty$ folgt $\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leqslant 1$.

Effiziente (bandbreitensparende) Codierung

Szenario: Codierung mit variabler Codewortlänge.

Intuition: Je wahrscheinlicher ein Symbol ist, desto kürzer soll seine Codierung sein.

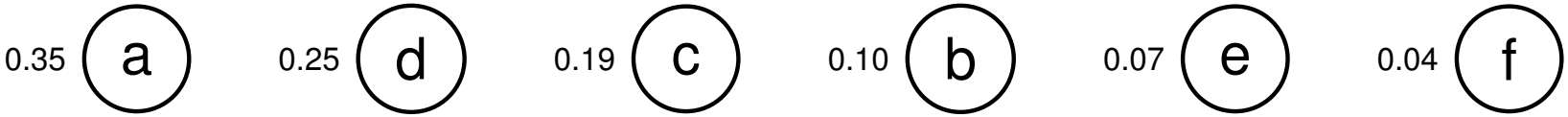
Huffman Codierung macht genau das.
Erst beschreiben wir sie, dann beweisen dass der resultierende Code kompakt ist.

Beispiel

Sei folgende Quelle gegeben mit Quellenwahrscheinlichkeiten

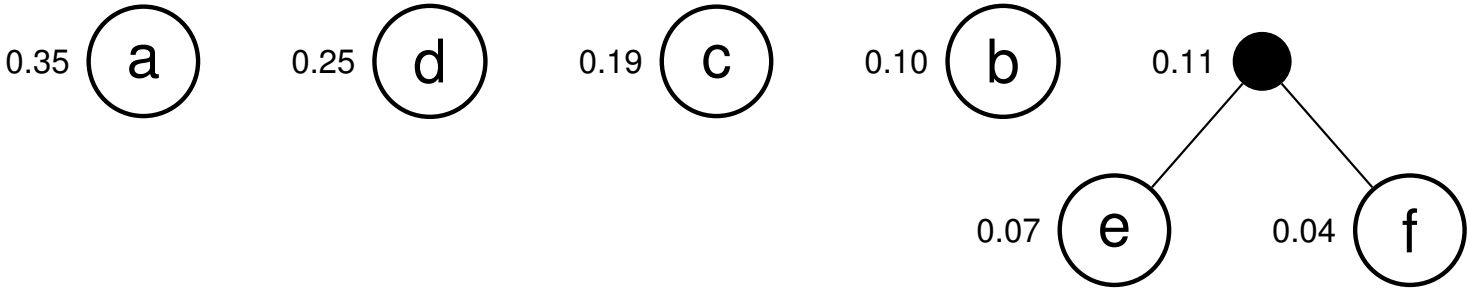
Symbol	*Wahrscheinlichkeit*
a	0.35
b	0.10
c	0.19
d	0.25
e	0.07
f	0.04

Beispiel



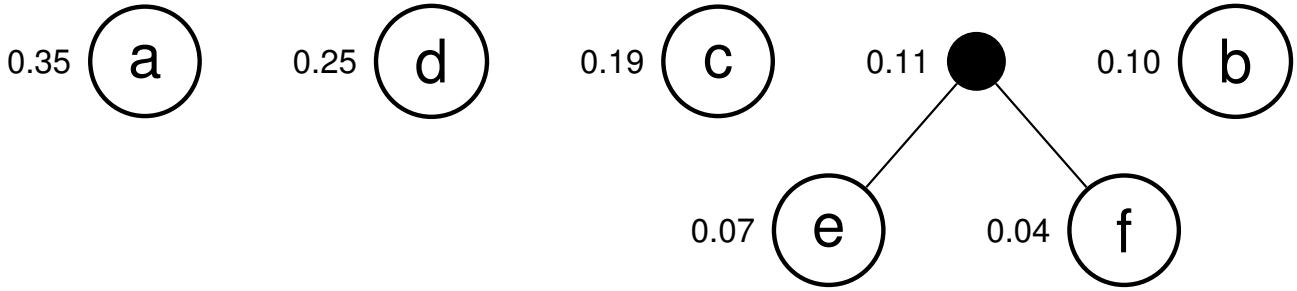
Schritt 1: Bilde sechs Knoten, etikettiert je mit einem Symbol. Die Knoten sind nach absteigender Ws des entsprechenden Symbols geordnet.
Diese sind die „Level 1“ Knoten.
Neben jedem Knoten schreiben wir die Ws.

Beispiel



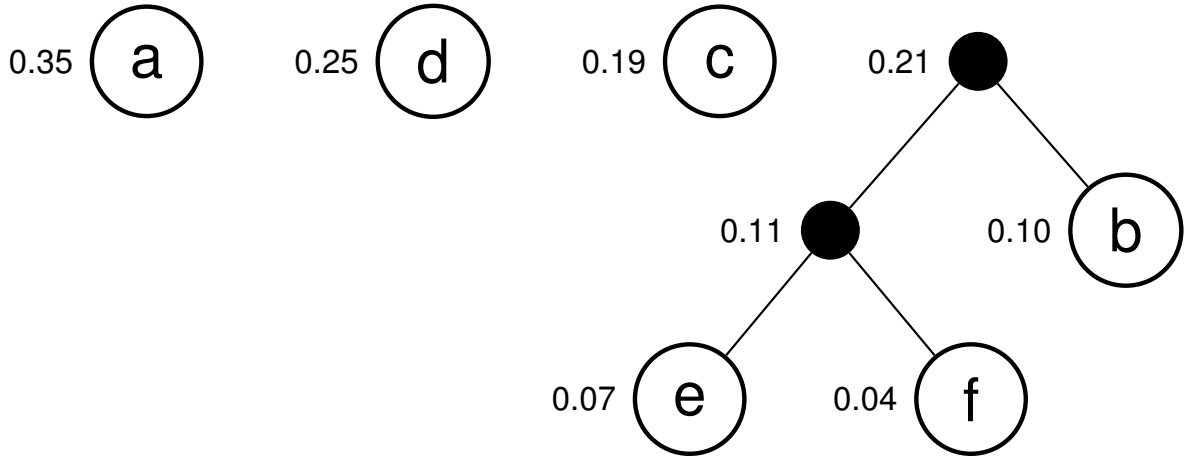
Schritt 2: Verbinde die zwei Knoten nach rechts (Symbole mit niedrigsten Ws) einem neuen Knoten dessen Ws ist die Summe der Ws der Zwei alten Knoten.
Die alten Knoten werden Kinder des neuen Knotens.
Der neue Knoten wird sich in die „Level 1“ Knoten einreihen.

Beispiel



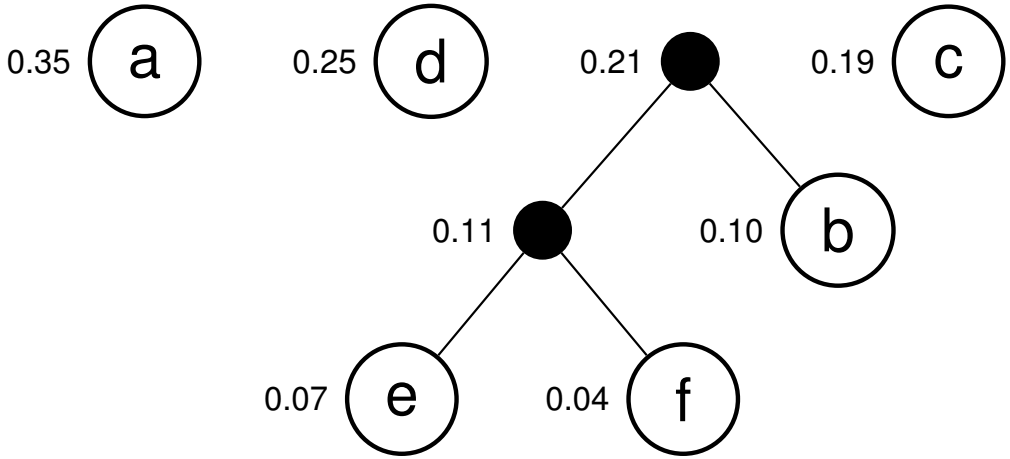
Schritt 3: Ordne die „Level 1“ Knoten nach absteigender Wahrscheinlichkeit wieder.

Beispiel



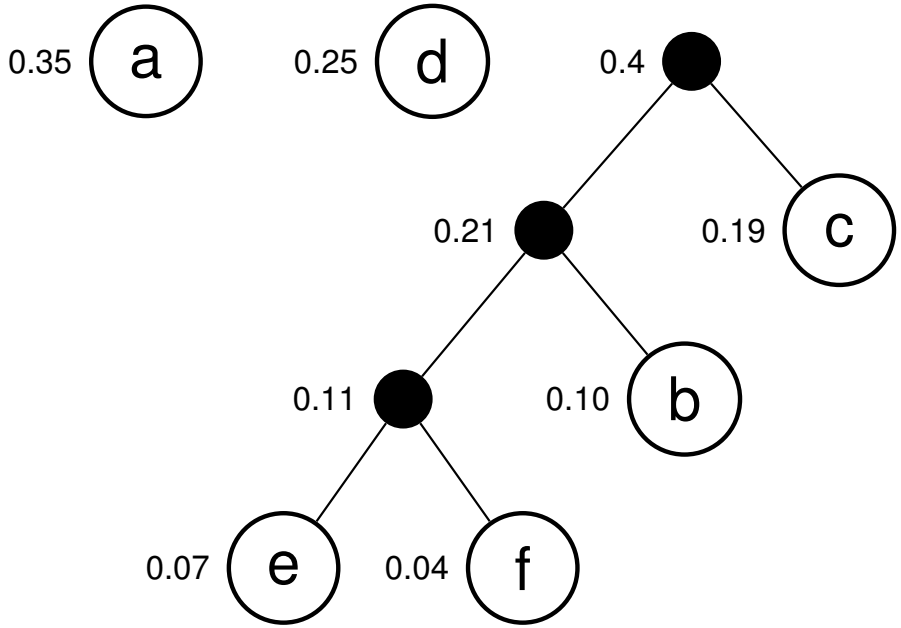
Verbinde die zwei Knoten nach rechts (also die mit den niedrigsten Wahrscheinlichkeiten) wie in Schritt 2.

Beispiel



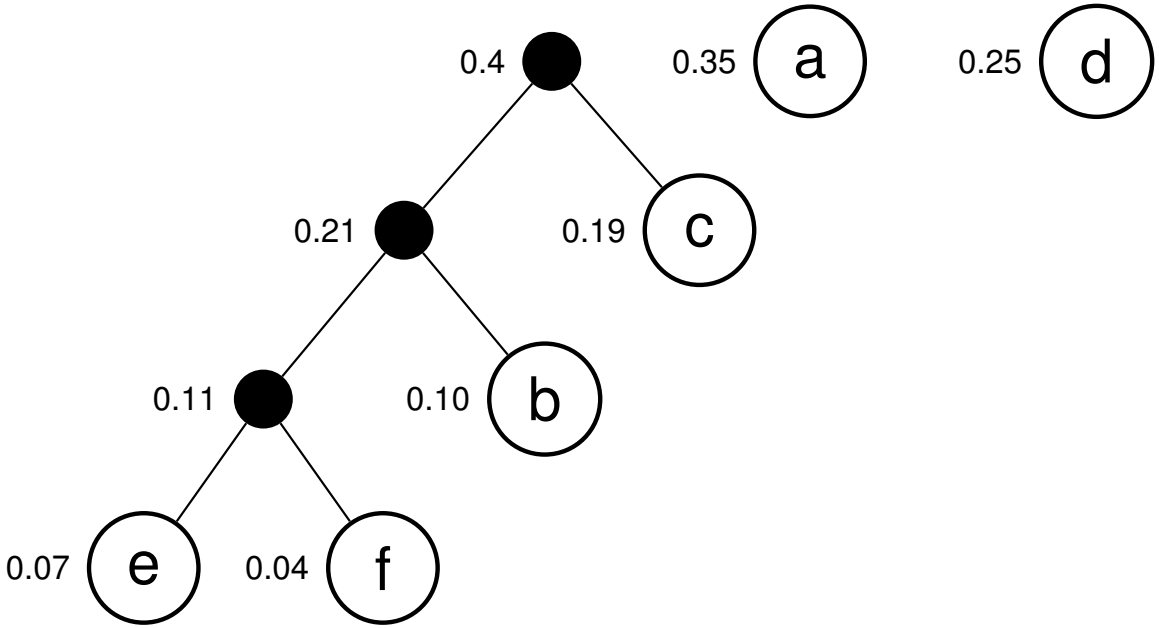
Und ordne wieder, wie in Schritt 3.

Beispiel



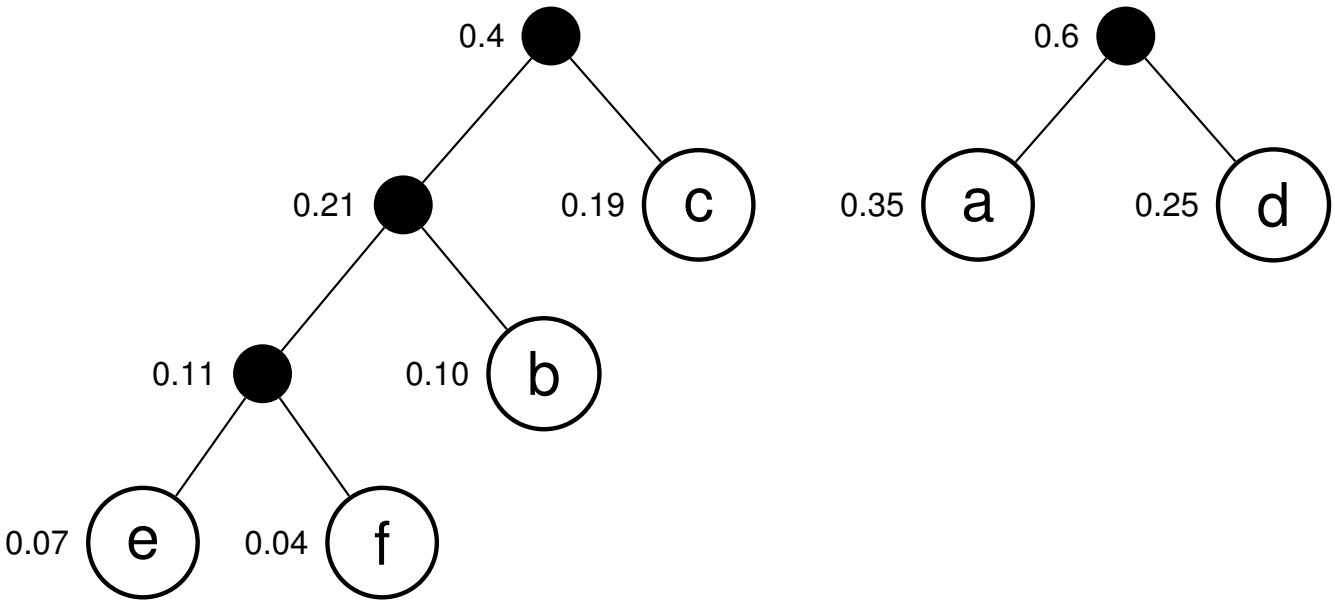
Verbinde.

Beispiel



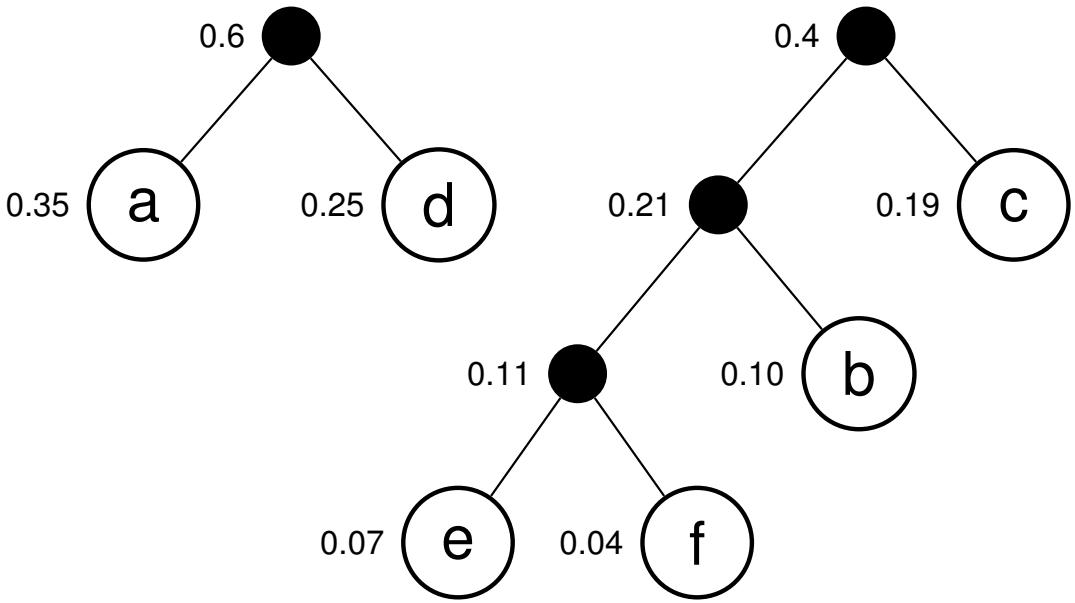
Ordne.

Beispiel



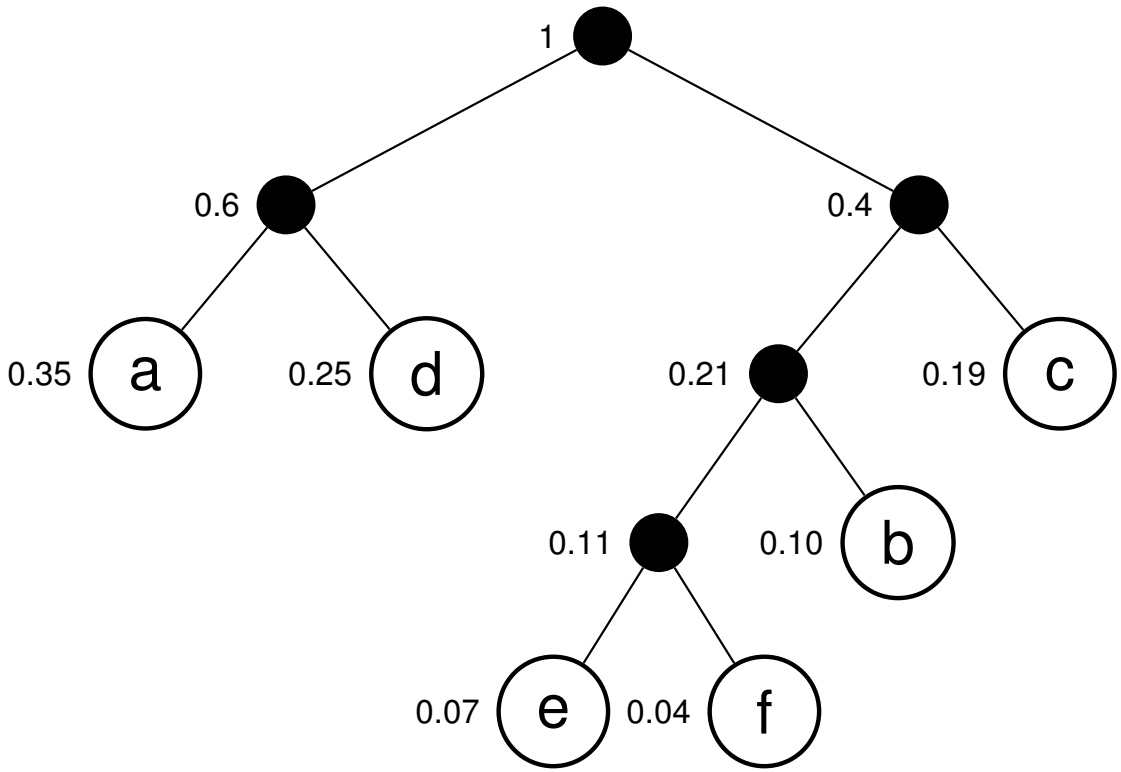
Verbinde.

Beispiel



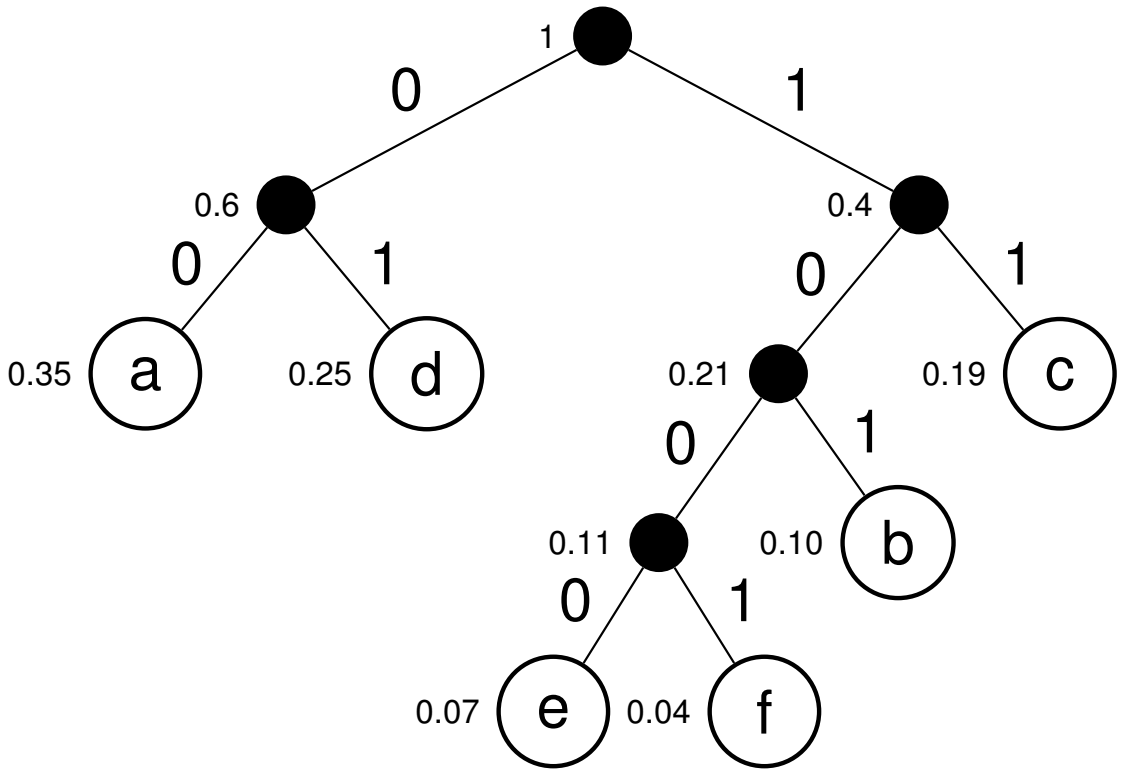
Ordne.

Beispiel



Verbinde. Nun haben wir einen Baum.

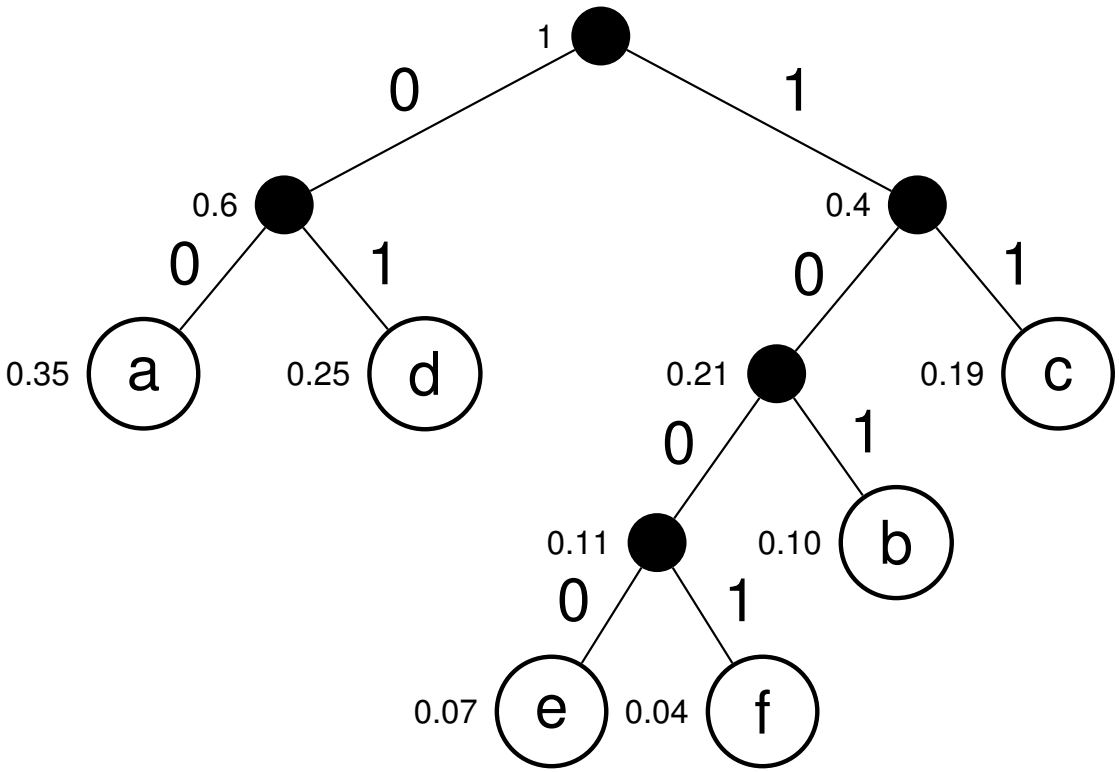
Beispiel



Etikettiere die Kanten. Kanten nach links mit 0, die nach rechts mit 1.

Beispiel

$f \mapsto 1001$



Lese den Code ab! Das ist ein Präfixcode, denn die Labels mit den Quellensymbolen befinden sich nur an Blättern.

Beobachtungen

Symbol	*Wahrscheinlichkeit*
a	0.35
b	0.10
c	0.19
d	0.25
e	0.07
f	0.04

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a \mapsto 00 \\ b \mapsto 101 \\ c \mapsto 11 \\ d \mapsto 01 \\ e \mapsto 1000 \\ f \mapsto 1001 \end{cases}$$

1. Man sieht, dass die Symbole, die am häufigsten vorkommen, nicht längere Codierung besitzen als Symbole, die seltener vorkommen. Mit anderen Worten: **Falls $p_i > p_j$, dann ist $\ell_i \leqslant \ell_j$.**
2. Erwartete Codelänge $\sum p_i \ell_i =$
$= 0.35 \cdot 2 + 0.10 \cdot 3 + 0.19 \cdot 2 + 0.25 \cdot 2 + 0.07 \cdot 4 + 0.04 \cdot 4 = 2.32.$
Falls man 3 Bits per Symbol verwendet (das Minimum für 6 Symbolen), erw. Codelänge ist 3. Ersparnis von 22.7%.

Huffman Codierung

Szenario: Quelle Q mit Symbole $\{a_1, \ldots, a_n\}$

- a_i sortiert nach absteigenden Quellws. $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$.

Algorithmus Huffman-Codierung

Eingabe: Symbole a_i mit absteigend sortierten p_i, $i = 1, \ldots, n$.

1. IF (n=2), Ausgabe $C(a_1) = 0$, $C(a_2) = 1$.
2. ELSE
   1. Bestimme $k \in \mathbb{Z}_{n-1}$ mit $p_k \geqslant p_{n-1} + p_n \geqslant p_{k+1}$.
   2. $(p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_{n-1}) \leftarrow$
      $(p_1, \ldots, p_k, p_{n-1} + p_n, p_{k+1}, \ldots, p_{n-2})$
   3. $(C(a_1), \ldots, C(a_{k-1}), C(a_{k+1}), \ldots, C(a_{n-2}), C(a_k)0, C(a_k)1) \leftarrow$
      Huffmann-Codierung$(a_1, \ldots, a_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1})$

Ausgabe: kompakter Präfixcode für Q

Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$ ($\mathcal{O}(n \log n)$ mit Hilfe von Heap-Datenstruktur)

Eigenschaften kompakter Codes

Sei $\ell_i := |C(a_i)|$.

Lemma Eigenschaften kompakter Codes

Sei C ein kompakter Code, oBdA ist C ein Präfixcode.

1. Falls $p_i > p_j$, dann ist $\ell_i \leqslant \ell_j$
2. Es gibt mindestens zwei Codeworte in C mit maximaler Länge.
3. Unter den Worten mit maximaler Länge existieren zwei Worte, die sich nur in der letzten Stelle unterscheiden.

Beweis der Eigenschaften

Beweis:

1. Sei $\ell_i > \ell_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & p_i\ell_i + p_j\ell_j = p_i(\ell_i - \ell_j + \ell_j) + p_j(\ell_j - \ell_i + \ell_i) \\ = \quad & p_i\ell_j + p_j\ell_i + (\ell_i - \ell_j)(p_i - p_j) > p_i\ell_j + p_j\ell_i \end{aligned}$$

   D.h. vertauschen der Codierungen von a_i und a_j verkürzt den Code.

2. Sei $c = c_1 \dots c_n \in C$ das einzige Codewort mit maximaler Länge. Streichen von c_n führt zu einem Präfixcode mit kürzerer erwarteter Codewortlänge.
3. Annahme: Alle Paar von Codeworten maximaler Länge unterscheiden sich nicht nur in der letzten Komponente.
   - Entferne die letzte Komponente eines beliebigen Codewortes maximaler Länge.
   - Wir erhalten einen Präfixcode mit kürzerer Länge.

Optimalität der Huffman-Codierung

Satz

Die Huffman-Codierung liefert einen kompakten Code.

Beweis per Induktion über n.

- **IV:** $n = 2$: Für $\{a_1, a_2\}$ ist die Codierung $\{0, 1\}$ kompakt.
- **IS:** $n - 1 \to n$: Sei C' kompakt für $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
  - Lemma,2: C' enthält zwei Codeworte maximaler Länge.
  - Lemma,3: Unter den Codeworten maximaler Länge gibt es zwei Codeworte $c0, c1 \in C'$ mit $c \in \{0, 1\}^*$, die sich nur in der letzten Stelle unterscheiden.
  - Lemma,1: Die beiden Symbole a_{n-1}, a_n mit kleinster Quellws besitzen maximale Codewortlänge. Vertausche die Codierungen dieser Symbole mit $c0, c1$.
  - a_{n-1} oder a_n tauchen mit Ws $p_{n-1} + p_n$ auf.
  - **IA:** Huffman-Codierung liefert kompakten Präfixcode C für $a_1, \ldots, a_{n-2}, a'$ mit Quellws $p_1, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1} + p_n$
  - $C(a_1), \ldots, C(a_{n-2}), C(a')0 = c0, C(a')1 = c1$ ist Präfixcode mit erwarteter Codewortlänge $E(C')$, d.h. die Huffman-Codierung liefert einen kompakten Präfixcode.

3. Woche
Information, Entropie

Informationsgehalt einer Nachricht

Intuitiv: Je kleiner die Quellws, desto „wichtiger“ oder „strukturierter“ die Information, bzw. höher der Informationsgehalt.

Zur Struktur:

Ws von „A“ ist 6,51%, Ws von „t“ ist 6,15%, Ws von „e“ ist 17,40% und Ws von „m“ ist 2,53 %.

Falls Buchstaben unabhängig (gedächtnisloser Kanal), ist Ws von „Atem“ gleich $0,0651 \cdot 0,0615 \cdot 0,174 \cdot 0,0253 = 1,76 * 10^{-5} = 0.00176\%$

(Eigentlich ist die deutsche Sprache kein gedächtnisloser Kanal: Nach den Daten im Leipziger Wortschatz: Ws von „Atem“ $< 0.0008\%$.)

Intuitiv betrachtet, enthält „Atem“ mehr Information als „A“, „t“, „e“, oder „m“.

Wir wollen eine Informations–„abmessende“ Funktion nach dieser Intuition definieren.

Informationsgehalt einer Nachricht

Forderungen für eine Funktion, die Information „abmessen“ soll.

1. $I(p) \geq 0$: Der Informationsgehalt soll positiv sein.
2. $I(p)$ ist stetig in p: Kleine Änderungen in der Ws p sollen nur kleine Änderungen von $I(p)$ bewirken.
3. $I(p_i) + I(p_j) = I(p_i p_j)$:
   - X = Ereignis, dass a_i und a_j nacheinander übertragen werden. Annahme war: gedächtnislose Quelle, also unabhängige Ereignisse.
   - Informationsgehalt von X: $I(p_i) + I(p_j)$, $\mathcal{W}s(X) = p_i p_j$

Satz zur Struktur von $I(p)$

Jede Funktion $I(p)$ für $0 < p \leqslant 1$, die obige Bedingungen erfüllt, ist der Form

$$I(p) = C \log \frac{1}{p}$$

für eine positive Konstante C.

Beweis: Form von $I(p)$

- Forderung 3 liefert $I(p^2) = I(p) + I(p) = 2\,I(p)$.
- Induktiv: $I(p^n) = n\,I(p)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 < p \leqslant 1$.
- Substitution $p \to p^{\frac{1}{n}}$ liefert: $I(p) = nI\left(p^{\frac{1}{n}}\right)$ bzw. $I\left(p^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\,I(p)$
- Damit gilt für alle $q \in \mathbb{Q}$: $I(p^q) = q\,I(p)$.
- Für jedes $r \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge q_i mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = r$.
  Aus der Stetigkeit von $I(p)$ (Annahme!) folgt

$$I(p^r) = I(p^{\lim\limits_{n\to\infty} q_n}) = I\Big(\lim_{n\to\infty} p^{q_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} I\left(p^{q_n}\right) = \lim_{n\to\infty} q_n I(p) = r\,I(p)$$

- Fixiere $0 < q < 1$. Für jedes $0 < p \leq 1$ gilt

$$I(p) = I\left(q^{\log_q p}\right) = I(q)\log_q p = -I(q)\log_q\left(\frac{1}{p}\right) = -I(q)\frac{\log_2 \frac{1}{p}}{\log_2 q}$$

$$= \boldsymbol{C\log_2\frac{1}{p}} \quad \text{wobei} \quad C = -I(q)\cdot\frac{1}{\log_2(q)} > 0\ .$$

□

Definition Information $I(p)$

Definition $I(p)$

Die Information $I(p)$ eines Symbols mit Quellws $p > 0$ beträgt

$$I(p) = \log_2 \frac{1}{p}.$$

Die Einheit der Information bezeichnet man als Bit.

Hier ist der Logarithmus zur Basis 2 gemeint (auch wenn nicht explizit geschrieben).

Beispiele für Information

- $Q = \{0, 1\}$ mit $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Dann ist $I(\frac{1}{2}) = 1$, d.h. für jedes gesendete Symbol erhält der Empfänger 1 Bit an Information.
- $Q = \{0, 1\}$ mit $p_1 = 1, p_2 = 0$. Dann ist $I(1) = 0$, d.h. der Empfänger enthält 0 Bit an Information pro gesendetem Zeichen.
- Beweis für „Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte!“
  - Beamer-Bild: Auflösung $1024 * 768$, 24-Bit Farben
    Ssenario: Der Dozent will Informationsfunktionen erklären.
    - $2^{1024*768*24}$ mögliche Folien. Annahme: Jede gleich wahrscheinlich!
    - Information in Bit: $I(2^{-1024*768*24}) = 1024 * 768 * 24 = 18.874.368$
  - Selbe Erklärung in Worten im Buch:
    $\leq$ 1000 Worte, $\leq$ 10.000 Worte Vokabular
    - Information: $I(10.000^{-1000}) < 13.288$

Entropie einer Quelle

Definition Entropie einer Quelle

Sei Q eine Quelle mit Quellws $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Die Entropie von Q ist

$$H(Q) = \sum_{i=1}^{n} p_i I(p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \quad .$$

- Für $p_i = 0$ definieren wir $p_i \log \frac{1}{p_i} = 0$. Also ist $p_i \log \frac{1}{p_i} = 0$ gdw $p_1 = 0$ oder 1.
- Entropie ist die durchschnittliche Information pro Quellsymbol.
  - $P = \{\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n \text{ Symbole}}\} : H(Q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log n = \log n$
  - $P = \{\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n \text{ Symbole}}, 0\} : H(Q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log n = \log n$
  - $P = \{1, 0, 0, \ldots, 0\} : H(Q) = 1 \cdot \log 1 = 0$

N.B.: man kann $H(Q)$ als auch $H(P)$ für eine Quelle Q mit Ws-Verteilung P schreiben.

Sätze über Entropie und Codewortlänge

Unser nächstes Ziel ist, folgende Sätze zu beweisen:

Satz Schranken für $H(Q)$

Sei Q eine Quelle mit Ws-Verteilung $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Dann gilt

$$0 \leqslant H(Q) \leqslant \log n.$$

Weiterhin gilt $H(Q) = \log n$ gdw alle $p_i = \frac{1}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $H(Q) = 0$ gdw $p_i = 1$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

D.h. die Beispiele der vorigen Folie sind extremal.

Codierungstheorem von Shannon (1948)

Sei Q eine Quelle für $\{a_1, \ldots, a_n\}$ mit Ws-Verteilung $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Sei C ein kompakter Code für Q. Dann gilt für die erwartete Codewortlänge

$$H(Q) \leqslant E(C) < H(Q) + 1.$$

Wechsel zu anderer Ws-Verteilung

Lemma Wechsel Ws-Verteilung

Seien $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ eine Ws-Verteilung und $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ mit $\sum_{i=1}^{n} q_i \leqslant 1$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} p_i I(p_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i I(q_i).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $p_i = q_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Nützliche Ungleichung für das Rechnen mit logs:

$$x - 1 \geqslant \ln x = \log x \cdot \ln 2 \qquad \text{für alle } x > 0$$

Gleichheit gilt gdw $x = 1$.
$\ln(x)$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus, $\log(x)$ ist zur Basis 2.

Beweis des Lemmas

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i I(p_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i I(q_i) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\log \frac{1}{p_i} - \log \frac{1}{q_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{p_i} \\
&\leqslant \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_i}_{\leqslant 1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1} \right) \leqslant 0 \ .
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt gdw $\frac{q_i}{p_i} = 1$ d.h. $q_i = p_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. □

Untere und obere Schranken für $H(P)$

Satz Schranken für $H(P)$

Sei Q eine Quelle mit Ws-Verteilung $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Dann gilt

$$0 \leqslant H(Q) \leqslant \log n.$$

Weiterhin gilt $H(Q) = \log n$ gdw alle $p_i = \frac{1}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $H(Q) = 0$ gdw $p_i = 1$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Sei $G = \{q_1 = \frac{1}{n}, \ldots, q_n = \frac{1}{n}\}$ die Gleichverteilung.
- Nach Lemma zum Wechsel von Ws-Verteilungen gilt

$$H(Q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{q_i} = \log n \sum_{i=1}^{n} p_i = \log n.$$

- Gleichheit gilt gdw $p_i = q_i = \frac{1}{n}$ für alle i.

Untere Schranke für $H(P)$

Verwenden Ungleichung $\log x \geqslant 0$ für $x \geqslant 1$. Gleichheit gilt gdw $x = 1$. Nun,

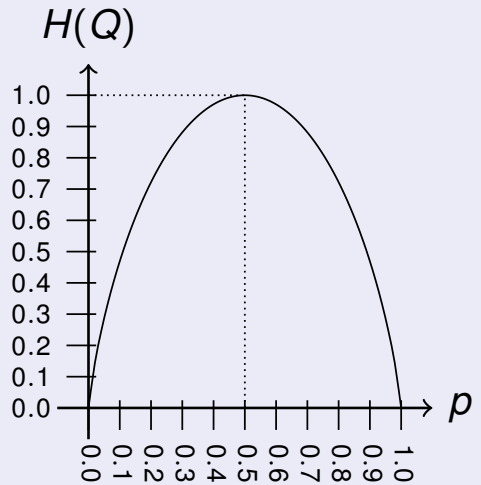
$$H(Q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} \geqslant 0,$$

mit Gleichheit gdw alle $p_i \log \frac{1}{p_i} = 0$, d.h. $p_i = 1$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p_j = 0$ für alle $j \neq i$. □

Beispiel

Binäre Quelle $Q = \{a_1, a_2\}$ mit $P = \{p, 1-p\}$

$$H(Q) = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p} \quad .$$



$H(Q)$ heißt *binäre Entropiefunktion*.

Codierungstheorem von Shannon

Codierungstheorem von Shannon (1948)

Sei Q eine Quelle für $\{a_1, \ldots, a_n\}$ mit Ws-Verteilung $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Sei C ein kompakter Code für Q. Dann gilt für die erwartete Codewortlänge

$$H(Q) \leqslant E(C) < H(Q) + 1.$$

Beweis: $H(Q) \leqslant E(C)$

- Bezeichnen Codewortlängen $\ell_i := |C(a_i)|$ und $q_i := 2^{-\ell_i}$.
- Satz von McMillan: $\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1$.
- Lemma Wechsel Ws-Verteilung liefert

$$\begin{aligned} H(Q) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{q_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \log 2^{\ell_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i \ell_i = E(C). \end{aligned}$$

$E(C) < H(Q) + 1$

- Seien $\ell_1, \ldots, \ell_n$ Codewortlängen mit $\sum_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1 = \sum_{i=1}^{n} p_i$.
- Satz von McMillan garantiert Existenz von Code C' für

$$2^{-\ell_i} \leqslant p_i \quad \Leftrightarrow \quad -\ell_i \leqslant \log p_i \quad \Leftrightarrow \quad \ell_i \geqslant \log \frac{1}{p_i}.$$

- Wählen $\ell_i \in \mathbb{N}$ für alle i minimal mit obiger Eigenschaft, d.h.

$$\log \frac{1}{p_i} \leqslant \ell_i < \log \frac{1}{p_i} + 1.$$

  Ein Code C' mit dieser Eigenschaft heißt *Shannon-Fano Code*.
- Für jeden kompakten Code C gilt

$$\begin{aligned} E(C) \leqslant E(C') &= \sum_{i=1}^{n} p_i \ell_i < \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\log \frac{1}{p_i} + 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^{n} p_i = H(Q) + 1 \ . \end{aligned}$$

□

Besser als kompakte Codes?

Nun wissen wir:

1. Die Huffman-Codierung liefert einen kompakten Code C.
2. Für diesen code C gilt $H(Q) \leqslant E(C) < H(Q) + 1$.

Falls wir Pech haben ist $E(C)$ fast gleich $H(Q) + 1$.

Können wir Codes bauen, die eine „kompaktere als eine kompakte“ Codierung liefern?

Wir fangen mit einem Beispiel an.

Codieren einer binären Quelle

Szenario: Binäre Quelle Q mit $P = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ mit

$$H(Q) = \frac{1}{4} \cdot \log 4 + \frac{3}{4} \cdot \log \frac{4}{3} \approx 0.811.$$

- Huffman-Codierung von Q:
  $C(a_1) = 0, C(a_2) = 1$ mit $E(C) = 1$.
- **Problem:** Jedes Symbol hat Codewortlänge $\geqslant 1$. Also $E(C) \geqslant 1$.
  Nota bene: dies gilt unabhängig von P.

  Da $H(Q) \to 0$ für $p \to 0$, folgt, dass $E(C) \to H(Q) + 1$!!!

  Wie kann mann die Ungleichheit der Wahrscheinlichkeiten ausnutzen, um die erwartete Codewortlänge zu reduzieren?
- **Idee:** Codieren *Zweierblöcke* von Quellsymbolen.

Quellenerweiterungen von Q

- Betrachten $Q^2 = \{a_1a_1, a_1a_2, a_2a_1, a_2a_2\}$ mit Quellws

$$p_1 = \frac{1}{16}, p_2 = p_3 = \frac{3}{16}, p_4 = \frac{9}{16}.$$

- Huffmann-Codierung von Q^2 liefert

$$C(a_1a_1) = 000, C(a_1a_2) = 001, C(a_2a_1) = 01, C(a_2a_2) = 1$$

mit $E(C) = 3 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{27}{16}$.

- Jedes Codewort codiert zwei Quellsymbole, d.h. die durchschnittliche Codewortlänge pro Quellsymbol ist

$$E(C)/2 = \frac{27}{32} = 0.84375.$$

- *Übung:* Für Q^3 erhält man 0.82292.
  Wie viel können wir dies noch verbessern?
  Wie nah kommen wir zur Entropie?

k-te Quellenerweiterung Q^k

Definition k-te Quellenerweiterung

Sei Q eine Quelle mit Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und Ws-Verteilung $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Die k-te Quellenerweiterung Q^k von Q ist definiert über dem Alphabet A^k, wobei $a = a_{i_1} \ldots a_{i_k} \in A^k$ die Quellws $p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}$ besitzt.

Satz Entropie von Q^k

Sei Q eine Quelle mit k-ter Quellenerweiterung Q^k. Dann gilt

$$H(Q^k) = k \cdot H(Q).$$

Beweis von $H(Q^k) = k \cdot H(Q)$

$$
\begin{aligned}
H(Q^k) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[1..n]^k} p_{i_1}\cdots p_{i_k} \log \frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}} \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[1..n]^k} p_{i_1}\cdots p_{i_k} \left(\log \frac{1}{p_{i_1}} + \cdots + \log \frac{1}{p_{i_1}}\right) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[1..n]^k} p_{i_1}\cdots p_{i_k} \log \frac{1}{p_{i_1}} + \cdots + \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[1..n]^k} p_{i_1}\cdots p_{i_k} \log \frac{1}{p_{i_k}}
\end{aligned}
$$

Betrachten wir den ersten Summanden

$$
\begin{aligned}
\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[1..n]^k} p_{i_1}\cdots p_{i_k} \log \frac{1}{p_{i_1}} &= \sum_{i_1\in[1..n]} p_{i_1} \log \frac{1}{p_{i_1}} \cdot \sum_{i_2\in[1..n]} p_{i_2} \cdots \sum_{i_k\in[1..n]} p_{i_k} \\
&= \sum_{i_1\in[1..n]} p_{i_1} \log \frac{1}{p_{i_1}} \cdot 1 \cdots 1 = H(Q).
\end{aligned}
$$

Analog liefern die anderen $n-1$ Summanden jeweils $H(Q)$. □

Anwendung des Satzes von Shannon auf Quellenerweiterungen

Korollar zu Shannons Codierungstheorem

Sei Q eine Quelle mit k-ter Quellenerweiterung Q^k. Sei C ein kompakter Code für Q^k. Dann gilt

$$H(Q) \leqslant \frac{E(C)}{k} < H(Q) + \frac{1}{k}.$$

Beweis: Anwendung von Shannon's Codierungstheorem auf Q^k liefert

$$H(Q^k) \leqslant E(C) < H(Q^k) + 1.$$

Behauptung folgt aus $H(Q^k) = k\,H(Q)$ und teilen durch k. □

Für wachsenden k, $E(C)/k$ wird beliebig nah zu $H(Q)$.

Bedingte Entropie

- Sei X, Y Zufallsvariablen
- Def: $\mathcal{W}s(x) = \mathcal{W}s(X = x)$ und $\mathcal{W}s(x \cap y) = \mathcal{W}s(X = x \cap Y = y)$.
- X, Y heißen unabhängig $\Leftrightarrow \mathcal{W}s(x \cap y) = \mathcal{W}s(x) \cdot \mathcal{W}s(y)$

Definition Bedingte Entropie

Wir bezeichnen die Größe $H(Y \mid X)$

$$:= \sum_x \mathcal{W}s(x) H(Y|X = x) = \sum_x \mathcal{W}s(x) \left(\sum_y \mathcal{W}s(y|x) \log \frac{1}{\mathcal{W}s(y|x)} \right)$$

$$= \sum_x \sum_y \mathcal{W}s(x \cap y) \log \frac{1}{\mathcal{W}s(y|x)}$$

als bedingte Entropie von Y gegeben X.

Eigenschaften bedingter Entropie

Rechenregeln für die bedingte Entropie

1. Kettenregel:

$$H(X \cap Y) = \sum_x \sum_y \mathcal{W}s(x \cap y) \log \frac{1}{\mathcal{W}s(x \cap y)} = H(X) + H(Y \mid X)$$

2. $H(Y \mid X) \leqslant H(Y)$. Gleichheit gilt gdw X, Y unabhängig sind.
3. $H(X \cap Y) \leqslant H(X) + H(Y)$.

Beweis: Übung.

Anwendung: Perfekte Sicherheit, das One-Time Pad

Definition Perfekte Sicherheit

Ein Kryptosystem ist perfekt sicher, falls $H(P \mid C) = H(P)$.

One-Time Pad

- Plaintextraum $\mathcal{P}$: $\{0,1\}^n$ mit Ws-Verteilung $p_1, \ldots, p_{2^n}$
- Schlüsselraum $\mathcal{K}$: $\{0,1\}^n$ mit Ws $\frac{1}{2^n}$ für alle Schlüssel
- Verschlüsselung: $c = e_k(x) = x \oplus k$ für $x \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{K}$.

Sicherheit des One-Time Pads

Satz One-Time Pad

Das One-Time Pad ist perfekt sicher.

Beweis:

- Wahrscheinlichkeit von Chiffretext c:

$$\mathcal{W}_S(c) = \sum_{x,k:e_k(x)=c} \mathcal{W}_S(x)\mathcal{W}_S(k) = \frac{1}{2^n} \sum_{x,k:e_k(x)=c} \mathcal{W}_S(x) = \frac{1}{2^n}.$$

  Letzte Gleichung: Für jedes x, c existiert genau ein $k = x \oplus c$ mit $e_k(x) = c$.
- $H(K) = H(C) = n$
- Es gilt $H(P \cap K \cap C) = H(P \cap K) = H(P) + H(K)$
- Andererseits
  $H(P \cap K \cap C) = H(P \cap C) = H(P \mid C) + H(C) = H(P \mid C) + H(K)$.
- Dies liefert $H(P \mid C) = H(P)$.

4. Woche
Decodierung; Maximale Codes

Szenario für fehlerkorrigierende Codes

Definition (n, M)-Code

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ ein binärer Blockcode der Länge n mit $|C| = M$ Codeworten. Dann bezeichnen wir C als (n, M)-Code.

Erinnerung: Binärer symmetrischer Kanal

- Bits 0,1 kippen mit Ws $p, p < \frac{1}{2}$ zu 1,0.
- Korrekte Übertragung $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ mit Ws $1 - p$.
- Kanal gedächtnislos: Ws unabhängig von vorigen Ereignissen. Insbesondere: für je zwei Wörter $\mathbf{c} = c_1 c_2 \cdots c_n$ und $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$ der Länge n gilt
  - für die Vorwärts-Kanalws:

$$\mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ empfangen} \mid \mathbf{c} \text{ gesendet}) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{W}s(x_i \text{ empfangen} \mid c_i \text{ gesendet})$$

  - für die Rückwärts-Kanalws:

$$\mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ gesendet} \mid \mathbf{c} \text{ empfangen}) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{W}s(x_i \text{ gesendet} \mid c_i \text{ empfangen})$$

Idealer Beobachter

Definition

Für eine empfangene Nachricht x, ein *Idealer Beobachter* wählt ein Codewort $c \in C$, derart dass

$$\mathcal{W}s(\mathbf{c} \text{ gesendet } | \mathbf{x} \text{ empfangen})$$

maximal ist.
(Mit anderen Worten, c ist das Codewort, das *am wahrscheinlichsten* die gesendete Nachricht war, in dem Fall, dass x empfangen wird.)

- Am wahrscheinlichsten gesendetes Codewort nicht unbedingt eindeutig.

  Allgemeiner: Mehrere Codeworte können die selbe Wahrscheinchkeit haben, durch Fehler in das selbe empfangene Codewort umgewandelt zu werden.

- Man braucht dann ein Kriterium, um **ein** Wort zu wählen z.B.
  - erneut senden falls nicht eindeutig
  - zufällig wählen
  - das „minimale” Wort (interpretiert als n-Bit Zahl) wählen
  - usw

Decodieren

Definition Decodier-Kriterium

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ ein (n, M)-Code. Ein Decodier-Kriterium f ist eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to C \cup \{\perp\}$. Das Symbol $\perp$ bedeutet: Decodierfehler.

Gesucht: Bestimme f, dass Ws des *korrekten* Decodierens maximiert.

Definition Maximum Likelihood Decodierung

Ein Decodierkriterium $f(\mathbf{x})$, dass die Vorwärts-Ws für alle Codeworte maximiert, d.h.

$$\mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ empfangen } | f(\mathbf{x}) \text{ gesendet}) = \max_{c \in C} \mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ empfangen } | \mathbf{c} \text{ gesendet }),$$

heißt Maximum-Likelihood Kriterium.
Eine Anwendung des Kriteriums heißt: Maximum-Likelihood Decodierung.

Ist f ein idealer Beobachter? In welchen Fällen?

Warum Maximum Likelihood?

Satz Maximum Likelihood optimal für gleichverteilte Codeworte

Sei C ein (n, M)-Code und $\mathcal{W}s(\mathbf{c} \text{ gesendet}) = \frac{1}{M}$ für alle $\mathbf{c} \in C$.
Dann minimiert die Maximum-Likelihood Decodierung die Ws von Decodierfehlern, i.e. Maximum Likelihood Decoding $=$ Decodierung eines idealen Beobachters.

Beweis. Nach dem Satz von Bayes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ empfangen} \mid \mathbf{c} \text{ gesendet}) &= \frac{\mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ empfangen} \cap \mathbf{c} \text{ gesendet})}{\mathcal{W}s(\mathbf{c} \text{ gesendet})} \\
&= \mathcal{W}s(\mathbf{c} \text{ gesendet} \mid \mathbf{x} \text{ empfangen}) \cdot \frac{\mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ empfangen})}{\mathcal{W}s(\mathbf{c} \text{ gesendet})} \\
&= \mathcal{W}s(\mathbf{c} \text{ gesendet} \mid \mathbf{x} \text{ empfangen}) \cdot \Big(\underbrace{\mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ empfangen}) \cdot M}_{\text{konstant für festes } \mathbf{x}} \Big) \quad .
\end{aligned}$$

Also: $\mathcal{W}s(\mathbf{x} \text{ empfangen} \mid \mathbf{c} \text{ gesendet})$ maximal (für festes $\mathbf{x}$, als Funktion von $\mathbf{c}$) gdw $\mathcal{W}s(\mathbf{c} \text{ gesendet} \mid \mathbf{x} \text{ empfangen})$ maximal. □

Decodieren zum Nachbarn minimalen Abstands

Definition Hamming-Abstand

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$. Der Hamming-Abstand $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist die Anzahl der Stellen, an denen sich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ unterscheiden.

Satz

In jedem binären symmetrischen Kanal ist das Decodier-Kriterium, das ein $\mathbf{x}$ zum Codewort minimalen Hamming-Abstands decodiert ein Maximum-Likelihood Kriterium.

Beweis: *Übung. (Prüfungsrelevant.)*

Der Hamming-Abstand definiert eine Metrik.

Satz Metrik Hamming-Abstand

Der Hamming-Abstand ist eine Metrik auf $\{0,1\}^n$, d.h. für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \{0,1\}^n$ gilt:

1. Positivität: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, Gleichheit gdw $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. Symmetrie: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. Dreiecksungleichung: $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Beweis: *Übung. (Prüfungsrelevant.)*

Fehlererkennung

Definition *u*-fehlererkennend

Sei C ein Code und $u \in \mathbb{N}$. C ist *u-fehlerkennend*, falls für alle Codeworte $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in C$ gilt: $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \geqslant u + 1$. Ein Code ist *genau u-fehlererkennend*, falls er u-fehlererkennend ist, aber nicht $(u+1)$-fehlererkennend.

- Repetitionscode $R(3) = \{000, 111\}$ ist genau 2-fehlererkennend.
- $R(n) = \{0^n, 1^n\}$ ist genau $(n-1)$-fehlererkennend.
- $C = \{000000, 000111, 111111\}$ ist genau 2-fehlererkennend.

Fehlerkorrektur

Definition v-fehlerkorrigierend

Sei C ein Code und $v \in \mathbb{N}$. C ist *v-fehlerkorrigierend*, falls für alle $\mathbf{c} \in C$ gilt: *Treten bis zu v bei der Übertragung von $\mathbf{c}$ auf, so können diese mittels Decodierung zum Codewort minimalen Hamming-Abstands korrigiert werden.*
Ein Code ist *genau v-fehlerkorrigierend*, falls er v-fehlerkorrigierend aber nicht $(v+1)$-fehlerkorrigierend ist.

- $R(3) = \{000, 111\}$ ist genau 1-fehlerkorrigierend.
- $R(4)$ ist genau 1-fehlerkorrigierend.
- $R(n)$ ist genau $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$-fehlerkorrigierend.
- $C = \{0^9, 0^4 1^5, 1^9\}$ ist genau 1-fehlerkorrigierend.

Minimal-Abstand eines Codes

Definition Minimal-Abstand

Sei C ein Code mit $|C| \geqslant 2$. Der *MinimalAbstand* $d(C)$ eines Codes ist definiert als

$$d(C) = \min_{\mathbf{c} \neq \mathbf{c}' \in C} \{d(\mathbf{c}, \mathbf{c}')\}$$

D.h. $d(C)$ ist der minimaler Abstand zweier verschiedener Codeworte.

- $R(n)$ besitzt Minimal- $d(R(n)) = n$.
- $C = \{0001, 0010, 0101\}$ besitzt $d(C) = 1$.
- $C = \{0^9, 0^4 1^5, 1^9\}$ besitzt $d(C) = 4$.

Korollar Fehlererkennung

Ein Code C ist u-fehlererkennend gdw $d(C) \geqslant u + 1$.

Fehlerkorrektur vs Minimal-Abstand

Satz Fehlerkorrektur vs MinimalAbstand

Ein Code C ist v-fehlerkorrigierend gdw $d(C) \geqslant 2v + 1$.

$\Leftarrow$:

- **Ann.:** C ist nicht v-fehlerkorrigierend.
- D.h. bei Übertragung von $\mathbf{c}$ entsteht $\mathbf{x}$ mit $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \leqslant v$ und $\exists\, \mathbf{c}' \neq \mathbf{c} : d(\mathbf{c}', \mathbf{x}) \leqslant v$
- Dreiecksungleichung: $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \leqslant d(\mathbf{c}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{c}') \leqslant 2v$ (Widerspruch: $d(C) \geqslant 2v + 1$)

Beweis der Hinrichtung "$\Rightarrow$"

Ann.: Es gibt $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}' \in C$ mit $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = d(C) \leqslant 2v$.

- 1.Fall: $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \leqslant v$. $\mathbf{c}$ kann durch Ändern von höchstens v Stellen in $\mathbf{x} = \mathbf{c}'$ überführt werden. $\mathbf{x}$ wird fälschlich zu $\mathbf{c}'$ decodiert (Widerspruch: C ist v-fehlerkorrigierend)
- 2. Fall: $v + 1 \leqslant d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \leqslant 2v$.
- OBdA unterscheiden sich in $\mathbf{c}, \mathbf{c}'$ in den ersten $d(C)$ Positionen. (Anderfalls sortiere die Koordinaten um.)
- Betrachten $\mathbf{x}$, das durch v Fehler in den ersten Koordinaten von $\mathbf{c}$ entsteht, so dass
  - $\mathbf{x}$ stimmt mit $\mathbf{c}'$ auf den ersten v Koordinaten überein.
  - $\mathbf{x}$ stimmt mit $\mathbf{c}$ auf den folgenden $d(C)$ Koordinaten überein.
  - $\mathbf{x}$ stimmt mit $\mathbf{c}, \mathbf{c}'$ auf den restlichen Koordinaten überein.
- Es gilt $d(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = v \geqslant d(C) - v = d(\mathbf{c}', \mathbf{x})$.
- D.h. entweder wird $\mathbf{x}$ fälschlich zu $\mathbf{c}'$ decodiert, oder es entsteht ein Decodierfehler. (Widerspruch: C ist v-fehlerkorrigierend)

(n, M, d)-Code

Definition (n, M, d)-Code

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ mit $|C| = M$ und Abstand $d(C) = d$. Dann bezeichnet man C als (n, M, d)-Code, wobei man (n, M, d) die *Parameter des Codes* nennt.

- $R(n)$ ist ein $(n, 2, n)$-Code.
- $C = \{0000, 0011\}$ ist ein $(4, 2, 2)$-Code.
- $C = \{00, 01, 10, 11\}$ ist ein $(2, 4, 1)$-Code.

Korollar

Sei C ein (n, M, d)-Code.

1. C ist genau v-fehlerkorrigierend gdw $d = 2v + 1$ oder $d = 2v + 2$.
2. C ist genau $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$-fehlerkorrigierend.

Maximale Codes

Definition Maximale Code

Ein (n, M, d)-Code ist maximal, falls er nicht in einem $(n, M+1, d)$-Code enthalten ist.

Beispiele von $(4, M, 2)$-Codes:

- $C_1 = \{0000, 0011, 1111\}$ ist nicht maximal.
- $C_2 = \{0000, 0011, 1111, 1100\}$ ist nicht maximal.
- $C_3 = \{0000, 0011, 1111, 1100, 1001, 0110, 1010, 0101\}$ ist maximal.

Erweiterung nicht-maximaler Codes

Satz Erweiterung von Codes

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ ein (n, M, d)-Code. C ist maximal gdw für alle $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ gilt: Es gibt ein $\mathbf{c} \in C$ mit $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) < d$.

"$\Rightarrow$"

- Sei $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, so dass für alle $\mathbf{c} \in C : d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \geqslant d$.
- Dann ist $C \cup \{\mathbf{x}\}$ ein $(n, M+1, d)$-Code: Widerspruch.

"$\Leftarrow$"

- Sei $C' \supset C$ ein (n, M', d)-Code mit $M' > M$.
- Wähle $x \in C' \setminus C$, dann gilt $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \geqslant d$ für alle $\mathbf{c} \in C$.

Ws für Decodierfehler bei maximalen Codes

Satz Decodierfehler bei maximalen Codes

Sei C ein maximaler (n, M, d)-Code für einen binären symmetrischen Kanal. Für die Fehlerws beim Decodieren zum Codewort mit minimalem Hamming-Abstand gilt

$$\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant \mathcal{W}s(\text{Decodierfehler}) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Korrekte Decodierung bei $\leqslant \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ Fehlern, d.h. mit Ws mindestens

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- Inkorrekte Decodierung bei $\geq d$ Fehlern, d.h. mit Ws mindestens

$$\sum_{k=d}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Beispiele für Codes

Repetitionscode: $R(n)$ ist $(n, 2, n)$-Code.

Hamming Code: $\mathcal{H}(h)$ ist ein $(2^h - 1, 2^{n-h}, 3)$-Code.

Golay Codes: $\mathcal{G}_{23}$ ist ein $(23, 2^{12}, 7)$-Code.
$\mathcal{G}_{24}$ ist ein $(24, 2^{12}, 8)$-Code.
Einsatz: Voyager für Bilder von Jupiter und Saturn.

Reed-Muller Code: $RM(r, m)$ ist ein $(2^m, 2^{1+\binom{m}{1}+\ldots+\binom{m}{r}}, 2^{m-r})$-Code.
$RM(1, m) = (2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$.
Einsatz: Mariner 9 für Bilder vom Mars.

Hammingkugel

Definition Hammingkugel

Sei $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ und $r \geq 0$. Wir definieren die n-dimensionale Hammingkugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ und Radius r als

$$B^n(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \{0,1\}^n | d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}.$$

Beispiel: $B^3(001, 1) = \{001, 101, 011, 000\}$.

Satz Volumen von $B^n(\mathbf{x}, r)$

Das Volumen der Hammingkugel $B^n(\mathbf{x}, r)$ ist $V^n(r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}$.

- Es gibt $\binom{n}{i}$ Vektoren mit Abstand i von x.

Packradius eines Codes

Definition Packradius eines Codes

Sei C ein (n, M, d)-Code. Der Packradius $pr(C) \in \mathbb{N}$ von C ist die größte Zahl, so dass die Hammingkugeln $B^n(\mathbf{c}, pr(C))$ für alle $\mathbf{c} \in C$ disjunkt sind.

Korollar

Sei C ein (n, M, d)-Code.

1. Der Packradius von C ist $pr(C) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.
2. C ist genau v-fehlerkorrigierend gdw $pr(C) = v$.

5. Woche
Perfekte und Optimale Codes, Schranken

Packradius eines Codes (Wiederholung)

Definition Packradius eines Codes

Sei C ein (n, M, d)-Code. Der Packradius $pr(C) \in \mathbb{N}$ von C ist die größte Zahl, so dass die Hammingkugeln $B^n(\mathbf{c}, pr(C))$ für alle $\mathbf{c} \in C$ disjunkt sind.

Korollar

Sei C ein (n, M, d)-Code.

1. Der Packradius von C ist $pr(C) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.
2. C ist genau v-fehlerkorrigierend gdw $pr(C) = v$.

0^n als „standard“ Codewort

Lemma Äquivalenter Code mit 0^n

Sei C ein (n, M, d)-Code. Dann gibt es einen (n, M, d)-Code C' mit $0^n \in C'$.

Beweis: Übung. Wichtige Idee, man kann ein beliebiges Wort x nehmen, und einen Code C zusammen mit einer Abbildung $C \to C'$ konstruieren, so dass $x \mapsto 0^n$ und alle Abstände respektiert werden.

Beweisidee vom Korollar.1: wenn wir Kugeln größeren Radius nehmen, können wir explizit nichtleere Schnitte konstruieren. Übung.

Perfekte Codes

Die an den Codewörtern zentrierten Kugeln und mir Radius $\frac{d-1}{2}$ überschneiden einander nicht. Also $M \cdot V^n\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor\right) \leqslant 2^n$ und somit $M \leqslant \frac{2^n}{V^n\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor\right)}$ d.h. $M \leqslant \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \binom{n}{i}}$. (Kugelpackungsschranke).
Max in der Tat in einigen Fällen erreichbar.

Definition Perfekter Code

Sei $C \subseteq \{0,1\}^n$ ein (n, M, d)-Code. C heißt *perfekt*, falls

$$M \cdot V^n\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor\right) = 2^n.$$

D.h. die maximalen disjunkten Hammingkugeln um die Codeworte partitionieren $\{0,1\}^n$.

Nicht für alle (n, M, d), die obige Bedingung erfüllen, gibt es auch einen Code.

Perfekte Codes

- $\{0,1\}^n$ ist ein $(n, 2^n, 1)$-Code
  - Packradius ist 0, Hammingkugeln bestehen nur aus Codewort selbst.
  - Perfekter Code, aber nutzlos für Fehlerkorrektur.
- $R(n)$ ist für ungerade n ein perfekter $(n, 2, n)$-Code.
  - $2 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} = 2 \cdot \frac{2^n}{2} = 2^n$
  - Code ist nutzlos, da er nur zwei Codeworte enthält.
- Der Golay Code $(23, 2^{12}, 7)$ ist perfekt.
  - $2^{12} \cdot \sum_{i=0}^{3} \binom{23}{i} = 2^{11} \cdot 2^{12} = 2^{23}$
- Der Hamming Code $\mathcal{H}(h) = (n, M, d) = (2^h - 1, 2^{n-h}, 3)$ ist perfekt.
  - $2^{n-h}\left(1 + 2^h - 1\right) = 2^n$
- Die einzigen perfekten, binären v-fehlerkorrigierenden Codes mit $v \geq 2$ sind Repetitionscodes und der obige Golay Code.

Die Größe $A(n, d)$ und optimale Codes

Definition Optimaler Code

Wir definieren

$$A(n, d) = \max\{M \mid \exists \text{ binärer } (n, M, d) - \text{Code}\}$$

Ein (n, M, d)-Code heißt optimal, falls $M = A(n, d)$.

- Bestimmung von $A(n, d)$ ist offenes Problem.
- Zeigen hier obere und untere Schranken für $A(n, d)$.
- Für kleine Werte von n, d bestimmen wir $A(n, d)$ wie folgt:
  - Zeigen $A(n, d) \leqslant M$.
  - Konstruieren (n, M, d)-Code.

- $A(n, d) \leqslant 2^n$ für $d \in [n]$: höchstens 2^n Codeworte der Länge n.
- $A(n, 1) = 2^n$: $C = \{0, 1\}^n$.
- $A(n, n) = 2$: $R(n)$.
- $A(n, d) \leqslant A(n, d')$ für $1 \leqslant d' \leqslant d \leqslant n$ (Übung).

Erstes nicht-triviales Resultat

Satz

$A(4,3) = 2$.

- Sei C ein optimaler $(4, M, 3)$-Code. OBdA $0000 \in C$.
- Worte mit Abstand mindestens 3 von 0000:

$$0111, 1011, 1101, 1110, 1111.$$

- Je zwei Worte besitzen Abstand höchstens 2, d.h. $A(4,3) \leqslant 2$.
- Für $C = \{0000, 0111\}$ gilt $d(C) = 3$ und damit $A(4,3) = 2$.

Verkürzen eines Codes

Definition Verkürzter Code

Sei C ein (n, M, d)-Code und $j \in [n]$, $b \in \{0, 1\}$. Der *bezüglich b-Bit an j-ter Position verkürzte Code* C' entsteht aus C durch

1. Einschränkung auf Codeworte aus C, deren j-tes Bit b ist.
2. Herausstreichen der j-ten Stelle.

- **Bsp:** Verkürzen von $C = \{001, 010, 101\}$ bezüglich 0-Bit an 1. Position liefert $C' = \{01, 10\}$.
- Beachte C besitzt Abstand 1, aber $d(C') = 2$.

Satz Verkürzter Code

Sei C ein (n, M, d)-Code und C' ein verkürzter Code. Dann gilt $d(C') \geqslant d$.

- Betrachten nur die bezüglich einer Stelle j konstanten Codeworte.
- Stelle j kann nicht zum Abstand beitragen.

Rekursive Schranke für $A(n, d)$

Lemma Rekursive Schranke

Für $n \geqslant 2$ gilt: $A(n, d) \leqslant 2 \cdot A(n-1, d)$.

- Sei C ein optimaler (n, M, d)-Code.
- Sei C_b der bezügl. b-Bit, $b \in \{0, 1\}$ an 1. Position verkürzte Code.
- Aus $d(C_b) \geq d$ folgt

$$\begin{aligned} A(n, d) = M = |C_0| + |C_1| &\leqslant A(n-1, d(C_0)) + A(n-1, d(C_1)) \\ &\leqslant A(n-1, d) + A(n-1, d). \end{aligned}$$

Korollar

$A(5, 3) = 4$.

- $A(5, 3) \leqslant 2 \cdot A(4, 3) = 4$.
- $C = \{00000, 11100, 00111, 11011\}$ besitzt $d(C) = 3$.

Schnitt von Strings

Definition Hamminggewicht, Schnitt

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq \{0,1\}^n$. Das Hamminggewicht $w(\mathbf{x})$ von $\mathbf{x}$ ist definiert als die Anzahl von Einsen in $\mathbf{x}$.
Seien $\mathbf{x} = x_1 \dots y_n$, $\mathbf{y} = y_1 \dots y_n$. Dann ist der *Schnitt* definiert als

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = x_1 \cdot y_1 \dots x_n \cdot y_n$$

Lemma Abstand via Gewicht

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq \{0,1\}^n$. Dann gilt

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - 2w(\mathbf{x} \cap \mathbf{y})$$

- Sei $\#_{bc}$: Anzahl Positionen mit b in $\mathbf{x}$ und c in $\mathbf{y}$, $b, c \in \{0,1\}$.
- Es gilt

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \#_{10} + \#_{01} &= (\#_{10} + \#_{11}) + (\#_{01} + \#_{11}) - 2\#_{11} \\ &= w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - 2w(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Ungerade d genügen

Satz

Sei $d \geqslant 1$ ungerade. Dann existiert ein (n, M, d)-Code C gdw ein $(n+1, M, d+1)$-Code C' existiert.

"$\Leftarrow$": Sei C' ein $(n+1, M, d+1)$-Code.

- Seien $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in C'$ mit $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = d+1$ und i eine Position mit $\mathbf{c_i} \neq \mathbf{c'_i}$.
- Lösche i-te Position aus C'. Resultierender Code C besitzt $d(C) = d$ und Länge n.

"$\Rightarrow$": Sei C ein (n, M, d) Code.

- C: Erweitere C um Paritätsbit, so dass $w(\mathbf{c})$ gerade für alle $\mathbf{c} \in C'$.
- Mittels Lemma

  $$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - 2w(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C'.$$

- Wegen $d = d(C)$ ungerade und $d \leqslant d(C') \leqslant d+1$ folgt $d(C') = d+1$.

Einige Werte von $A(n, d)$ (Quelle: Sloane 1982)

Korollar

$A(n, d) = A(n+1, d+1)$ für $d \geqslant 1$ ungerade.

n	5	6	7	8	9	10	11	16
$d = 3$	4	8	16	20	40	72-79	144-158	2560-3276
$d = 5$	2	2	2	4	6	12	24	256-340
$d = 7$	-	-	2	2	2	2	4	36-37

Gilbert-Varshamov-Schranke (Sphere-Covering) und Kugelpackungschranke (Sphere-Packing)

Satz Kugelschranken

$$\frac{2^n}{V^n(d-1)} \leq A(n,d) \leq \frac{2^n}{V^n\left(\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor\right)}.$$

Untere Schranke, d.h. Gilbert-Varshamov-Schranke (Sphere-Covering)

- Sei C ein optimaler (n, M, d)-Code, d.h. $M = A(n, d)$.
- Für alle $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n \exists\, \mathbf{c} \in C$: $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) < d$. (Warum?)

$$\{0,1\}^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B^n(\mathbf{c_i}, d-1) \quad \Rightarrow \quad 2^n \leqslant V^n(d-1) \cdot M.$$

Obere Schranke, d.h. Kugelpackungschranke (Sphere-Packing)

- Bei „Perfekten Codes“ haben wir gezeigt, dass für einen (n, M, d)-Code C gilt $M \leqslant \frac{2^n}{V^n\left(\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor\right)}$. Insbesondere gilt dies auch für C optimal, d.h. mit $M = A(n.d)$.

Bsp $A(n,3)$ für Sphere-Covering und Sphere-Packing

n	5	6	7	8	9	10	11	16
untere	2	3	5	7	12	19	31	479
$A(n,3)$	4	8	16	20	40	72-79	144-158	2560-3276
obere	5	9	16	28	51	93	170	3855

Singleton-Schranke

Satz Singleton-Schranke

$$A(n, d) \leq 2^{n-d+1}$$

- Sei C ein optimaler (n, M, d)-Code. Entferne letzte $d-1$ Stellen.
- Resultierende Codeworte sind alle verschieden, da sich $\mathbf{c} \in C$ in mindestens d Stellen unterscheiden.
- Es gibt M viele verkürzte unterschiedliche Codeworte der Länge $n-(d-1)$:

$$M \leq 2^{n-d+1}.$$

Vereinfachte Plotkin-Schranke

Satz Vereinfachte Plotkin-Schranke

Sei $n < 2d$, dann gilt

$$A(n,d) \leqslant \frac{2d}{2d-n}.$$

- Sei C ein optimaler $(n, M, d) - Code$ und $S = \sum_{i<j} d(\mathbf{c_i}, \mathbf{c_j})$.
- Je zwei Codeworte besitzen Abstand mindestens d, d.h. $S \geqslant d\binom{M}{2}$.
- Betrachten erste Stelle in allen Codeworten:
  - Sei k die Anzahl der Nullen und $(M-k)$ die Anzahl der Einsen.
  - Erste Stelle liefert Beitrag von $k(M-k)$ zu S.
  - $k(M-k)$ ist maximal für $k = \frac{M}{2}$, d.h. $k(M-k) \leqslant \frac{M^2}{4}$.
  - Analog für jede der n Stellen, d.h. $S \leqslant \frac{nM^2}{4}$.
- Kombination beider Schranken und Auflösen nach M liefert

$$M \leqslant \frac{2d}{2d-n}.$$

Vergleich der oberen Schranken

n	7	8	9	10	11	12	13
$A(n,7)$	2	2	2	2	4	4	8
Singleton	2	4	8	16	32	64	128
Plotkin	2	2	2	3	4	7	14

Die Rate eines Codes

Definition Rate eines Codes

Sei C ein (n, M, d)-Code.

1. Die *Übertragungsrate* ist definiert als $\mathcal{R}(C) = \frac{\log_2(M)}{n}$.
2. Die *Fehlerrate* ist definiert als $\delta(C) = \frac{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}{n}$.

Beispiele:

- $C = \{0^n\}$ hat Übertragungrate 0, aber perfekte Fehlerkorrektur.
- $C = \{0,1\}^n$ hat Übertragungrate 1, aber keine Fehlerkorrektur.
- $\mathcal{R}(R(n)) = \frac{1}{n}$ und $\delta(R(n)) = \frac{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{n}$.
  - Übertragungsrate konvergiert gegen 0, Fehlerrate gegen $\frac{1}{2}$.
- $\mathcal{R}(\mathcal{H}(h)) = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n}$ und $\delta(\mathcal{H}(h)) = \frac{1}{n}$.
  - Übertragungsrate konvergiert gegen 1, Fehlerrate gegen 0.

Shannons Theorem für fehlerbehaftete Kanäle

Codierungstheorem von Shannon für fehlerbehaftete Kanäle

Gegeben sei ein binärer symmetrischer Kanal Q mit Fehlerws p. Für alle $R < 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p) = 1 - H(Q)$ und alle $\epsilon > 0$ gibt es für hinreichend große n einen (n, M)-Code C mit Übertragungsrate $\mathcal{R}(C) \geqslant R$ und $\mathcal{W}s(\text{Decodierfehler}) \leqslant \epsilon$.

- Beweis komplex, nicht-konstruktiv.
- Resultat gilt nur asymptotisch für genügend große Blocklänge.

6. Woche:
Lineare Codes, Syndrom, Gilbert-Varshamov Schranke

Erinnerung: Der Vektorraum $\mathbb{F}_2^n$

Schreiben $\{0,1\}^n$ als $\mathbb{F}_2^n$.

Definition Vektorraum $\mathbb{F}_2^n$

$(\mathbb{F}_2^n, +, \cdot)$ mit Addition modulo 2, $+ : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ und skalarer Multiplikation $\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ definiert einen Vektorraum, d.h.

1. Assoziativität: $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
2. Kommutativität: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
3. $\exists$ neutrales Element $\mathbf{0^n} : \mathbf{0^n} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0^n} = \mathbf{x}$
4. Selbstinverse: $\forall \mathbf{x} : \mathbf{x} = -\mathbf{x}$, d.h. $\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0^n}$.
5. Skalare Multiplikation: $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

Definition Unterraum des $\mathbb{F}_2^n$

$S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ist ein Unterraum des $\mathbb{F}_2^n$ gdw

$$\mathbf{0^n} \in S \text{ und } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S : \mathbf{x} - \mathbf{y} \in S.$$

- Code $C = \{000, 100, 010, 110\}$ ist Unterraum des $\mathbb{F}_2^n$.

Erinnerung: Erzeugendensystem und Basis

Definition Erzeugendensystem und Basis eines Unterraums

Sei $S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Unterraum. Eine Menge $G = \{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\} \subseteq S$ heißt *Erzeugendensystem* von S, falls jedes $\mathbf{x} \in S$ als Linearkombination

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{g_1} + \ldots \alpha_k \mathbf{g_k} \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{F}_2$$

geschrieben werden kann. Notation: $S = \langle \mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k} \rangle$.
Eine *Basis* B ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. keine Teilmenge von B erzeugt S.

- $C = \{000, 100, 010, 110\}$ wird von $G = \{000, 100, 010\}$ erzeugt.
- $B = \{100, 010\}$ ist eine Basis von C.
- $B' = \{100, 110\}$ ist ebenfalls eine Basis.

Erinnerung: Basisergänzung

Erinnerung Eigenschaften einer Basis

Sei $S \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Unterraum.

1. Jede Basis von S hat dieselbe Kardinalität, genannt die Dimension $dim(S)$.
2. Jedes Erzeugendensystem G von S enthält eine Untermenge, die eine Basis von S ist.
3. Jede linear unabhängige Teilmenge von S kann zu einer Basis ergänzt werden.

Lineare Codes

Definition Linearer Code

Sei $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Code. Falls C ein Unterraum ist, bezeichnen wir C als *linearen Code*. Sei k die Dimension und d die Abstand von C, dann bezeichnen wir C als $[n, k, d]$-Code.

- $C = \{000, 100, 010, 110\}$ ist ein $[3, 2, 1]$-Code.
- $C = \langle 1011, 1110, 0101 \rangle$ ist ein $[4, 2, 2]$-Code.
- Jeder $[n, k, d]$-Code ist ein $(n, 2^k, d)$-Code.
- D.h. wir können $M = 2^k$ Codeworte mittels einer Basis der Dimension k kompakt darstellen.
- Beispiele für lineare Codes:
  Hamming Codes, Golay Codes und Reed-Muller Codes.

Generatormatrix eines linearen Codes

Definition Generatormatrix

Sei C ein linearer $[n, k, d]$-Code mit Basis $B = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_k}\}$. Die $(k \times n)$-Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b_k} \end{pmatrix}$$

heißt Generatormatrix des Codes C.

Abstand von linearen Codes

Satz Abstand eines linearen Codes

Sei C ein linearer Code. Dann gilt

$$d(C) = \min_{\mathbf{c} \in C, \mathbf{c} \neq 0} \{w(\mathbf{c})\}.$$

"$\leq$":

- Sei $\mathbf{c_m} = \min_{\mathbf{c} \in C, \mathbf{c} \neq 0} \{w(\mathbf{c})\}$. Dann gilt

$$d(C) \leqslant d(\mathbf{c_m}, \mathbf{0^n}) = w(\mathbf{c_m})$$

"$\geq$":

- Seien $\mathbf{c_i}, \mathbf{c_j}$ Codeworte mit $d(C) = d(\mathbf{c_i}, \mathbf{c_j})$.
- Linearität von C: $\mathbf{c_i} + \mathbf{c_j} = \mathbf{c}' \in C$. Daher gilt

$$d(C) = d(\mathbf{c_i}, \mathbf{c_j}) = w(\mathbf{c_i} + \mathbf{c_j}) = w(\mathbf{c}') \geqslant \min_{\mathbf{c} \in C, \mathbf{c} \neq 0} \{w(\mathbf{c})\}.$$

Bsp: $G = \langle 110, 111 \rangle$ besitzt $d(G) = w(001) = 1$.

Decodierung mittels Standardarray

Algorithmus Standardarray

Eingabe: $C = \{\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_M}\}$ linearer $[n, \log_2 M, d]$-Code mit $\mathbf{c_1} = \mathbf{0^n}$.
Ausgabe: Standardarray A

1. Am Anfang $A \leftarrow C$, d.h. A ist nur eine Zeile.
2. While $A \neq \mathbb{F}_2^n$ (Notationsmissbrauch; bedeutet: wenn nicht ganz $\mathbb{F}_n^n$ in A)
   1. Wähle Fehlervektor $\mathbf{f} \in \mathbb{F}_2^n \setminus A$ mit minimalem Gewicht.
   2. Hänge Zeile $(\mathbf{c_1} + \mathbf{f} = \mathbf{f}, \mathbf{c_2} + \mathbf{f}, \ldots, \mathbf{c_M} + \mathbf{f})$ der Tabelle A an.

Beispiel: $C = \{0000, 1011, 0110, 1101\}$ besitzt Standardarray:

0000	**1011**	**0110**	**1101**
1000	0011	1110	0101
0100	1111	0010	1001
0001	1010	0111	1100

- Decodiere $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ zum Codewort in erster Zeile derselben Spalte

Korrektheit des Algorithmus

Satz Decodierung zum nächsten Nachbarn via Standardarray

Sei C ein linearer $[n,k]$-Code mit Standardarray A. Jeder String $\mathbf{x}$ wird durch Alg. *Standardarray* zu einem nächsten Nachbarn decodiert.

- Sei $\mathbf{x} = \mathbf{f_i} + \mathbf{c_j}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{c}\in C}\{d(\mathbf{x},\mathbf{c})\} &= \min_{\mathbf{c}\in C}\{w(\mathbf{x}-\mathbf{c})\} = \min_{\mathbf{c}\in C}\{w(\mathbf{f_i}+\mathbf{c_j}-\mathbf{c})\} \\ &= \min_{\mathbf{c}\in C}\{w(\mathbf{f_i}+\mathbf{c})\} \quad //\mathbf{c_j}-\mathbf{c} \text{ durchläuft alle Codeworte} \\ &= w(\mathbf{f_i}) \quad /^* \text{ wegen Schritt 2.1 } ^*/ = w(\mathbf{x}-\mathbf{c_j}) = d(\mathbf{x},\mathbf{c_j}) \ .\end{aligned}$$

Satz Decodierfehler perfekter linearer Codes

Sei C ein perfekter $[n,k,d]$-Code. Für einen binären symmetrischen Kanal mit Fehlerws p gilt bei Verwendung von Alg. *Standardarray*

$$\mathcal{W}s(\text{korrekte Decodierung}) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{(Beweis: Übung)}$$

Inneres Produkt und Orthogonalität

Fakt Eigenschaften des inneren Produkts

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{F}_2^n$ und $\alpha \in \mathbb{F}_2$. Dann gilt für das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ mit $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) \mapsto x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

1. Kommutativität: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
2. Distributivität: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$.
3. Skalare Assoziativität: $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Definition Orthogonalität, orthogonales Komplement

Sei $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{F}_2^n$. Wir bezeichnen $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ als orthogonal, falls $\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 0$, in Symbolen auch: $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$.
Das *orthogonale Komplement* $\{\mathbf{y}\}^\perp$ von $\mathbf{y}$ ist definiert als die Menge

$$\{\mathbf{y}\}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}.$$

Lineare Codes mittels orthogonalem Komplement

Satz Linearer Code $\{\mathbf{y}\}^\perp$

Sei $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$. Dann ist $\{\mathbf{y}\}^\perp$ ein linearer Code.

- Zeigen, dass $\{\mathbf{y}\}^\perp$ ein Unterraum des $\mathbb{F}_2^n$ ist.
- Abgeschlossenheit: Seien $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ im orthog. Komplement von $\mathbf{y}$.

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = 0$$

- $\mathbf{0} \in \{\mathbf{y}\}^\perp$, denn $\langle \mathbf{0}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Bsp:

- $\{\mathbf{1}\}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid w(\mathbf{x}) \text{ gerade}\}$
- Wir nennen $x_1 + \ldots + x_n = 0$ die *Parity Check Gleichung* des Codes $\{\mathbf{1}\}^\perp$.

Orthogonales Komplement erweitert auf Mengen

Definition Orthogonales Komplement einer Menge

Sei $C = \{\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_M}\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$. Das *orthogonale Komplement* von C ist definiert als

$$C^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \langle \mathbf{c_i}, \mathbf{x} \rangle = 0 \text{ für alle } i\}.$$

- Sei $\mathbf{c_i} = c_{i1} c_{i2} \ldots c_{in}$. Für $\mathbf{x} \in C^\perp$ gelten Parity Check Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ c_{M1}x_1 + c_{M2}x_2 + \ldots + c_{Mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

- Sei $P = (c_{ij})_{1 \le i \le M, 1 \le j \le n}$, dann gilt $P\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t$ bzw. $\mathbf{x}P^t = \mathbf{0}$.
- P heisst Kontrollmatrix (auch Parity Check Matrix, denn sie stellt ein System von Parity Check Gleichungen dar) von $C^\perp$.

Dualer Code

Satz Dualer Code

Sei $C = \{\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_M}\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Code. Das orthogonale Komplement $C^\perp$ von C ist ein linearer Code, genannt der duale Code von C.

Wir müssen nur zeigen, dass $C^\perp$ ein Vektorraum ist. Da

$$C^\perp = \bigcap_{\mathbf{x} \in C} \mathbf{x}^\perp$$

ist die Menge $C^\perp$ ein Schnitt von Vektorräumen, also ist sie ein Vektorraum.

Bsp

- Sei $C^\perp = \{100, 111\}^\perp$. Dann gelten die Parity Check Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

- Aus der 2. Gleichung folgt $x_2 = x_3$ in $\mathbb{F}_2$, d.h. $C^\perp = \{000, 011\}$.

Kontrollmatrix

Definition Parity Check Matrix und Kontrollmatrix P

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code. Eine Matrix P, derart dass

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{x}P^t = \mathbf{0}\}$$

heißt *Parity Check Matrix des Codes C*.
Ist P eine $(n-k) \times n$-Matrix P, dann heisst sie *Kontrollmatrix*.

- D.h. C wird sowohl durch eine Generatormatrix als auch durch eine Parity Check Matrix oder eine Kontrollmatrix eindeutig definiert.
- Im Gegensatz zu Generatormatrizen setzen wir nicht voraus, dass die Zeilen von P einer Parity Check Matrix linear unabhängig sind. Wir werden sehen dass die Zeilen einer Kontrollmatrix linear unabhängig sind.
- **Bsp.**: Code $C = \{011, 101\}^\perp$ besitzt die Parity Check Matrizen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften dualer Codes

Satz Eigenschaften dualer Codes I

Seien C, D Codes mit $C \subseteq D$. Dann gilt $D^\perp \subseteq C^\perp$.

Beweis:

$$D^\perp = \bigcap_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{x}^\perp = \left(\bigcap_{\mathbf{x} \in C} \mathbf{x}^\perp \right) \cap \left(\bigcap_{\mathbf{x} \in D \setminus C} \mathbf{x}^\perp \right) \subseteq \bigcap_{\mathbf{x} \in C} \mathbf{x}^\perp = C^\perp \ .$$

Satz Eigenschaften dualer Codes II

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code mit Generatormatrix G. Dann gilt

1. $C^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{x}G^t = \mathbf{0}\}$, d.h. G ist Parity Check Matrix für $C^\perp$.
2. $\dim(C^\perp) = n - \dim(C)$. Insbesondere müssen die Zeilen einer Kontrollmatrix für $C^\perp$ linear unabhängig sein.
3. $C^{\perp\perp} = C$.

Beweis der Eigenschaften 1+2

1. G besitze Zeilenvektoren $\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}$. Zeigen $C^\perp = \{\mathbf{g_1} \ldots, \mathbf{g_k}\}^\perp$.
   - Mit vorigem Satz folgt: $\{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\} \subseteq C \Rightarrow C^\perp \subseteq \{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\}^\perp$.
   - $\{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\}^\perp \subseteq C^\perp$: Sei $\mathbf{x} \in \{\mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_k}\}^\perp$. Dann ist $\mathbf{x}$ orthogonal zu jeder Linearkombination der $\mathbf{g_i}$, d.h. $\mathbf{x}$ ist orthog. zu jedem $\mathbf{c} \in C$.
2. Mit 1. gelten die Parity Check Gleichungen

$$\begin{aligned} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots g_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ g_{k1}x_1 + g_{k2}x_2 + \ldots g_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

   Umwandeln in linke Standardform liefert (eventuell nach Spaltenumbenennung)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1,n}x_n &= 0 \\ \ddots \qquad\qquad &\vdots \\ x_k \quad + a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k,n}x_n &= 0 \end{aligned}$$

   Variablen $x_{k+1}, \ldots, x_n$ frei wählbar. Daher gilt $\dim(C^\perp) = n - k$.
3. Zeigen $C \subseteq C^{\perp\perp}$ und $\dim(C) = \dim(C^{\perp\perp})$. Damit gilt $C = C^{\perp\perp}$.

Beweis $C = C^{\perp\perp}$

- Zeigen zunächst $C \subseteq C^{\perp\perp}$. Sei $\mathbf{c} \in C$.
- Es gilt $C^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{c_i} \rangle = \mathbf{0} \text{ für alle } \mathbf{c_i} \in C\}$.
- Ferner $C^{\perp\perp} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0} \text{ für alle } \mathbf{x} \in C\}$, d.h. $\mathbf{c} \in C^{\perp\perp}$.
- Wegen 2. gilt:
  $\dim(C^{\perp\perp}) = n - \dim(C^{\perp}) = n - (n - \dim(C)) = \dim(C)$.

Korollar Existenz einer Kontrollmatrix

Sei C ein linearer Code. Jede Generatormatrix von $C^{\perp}$ ist eine Kontrollmatrix für C. D.h. insbesondere, dass jeder lineare Code C eine Kontrollmatrix besitzt.

- $C^{\perp}$ ist linear, besitzt also eine Generatormatrix G.
- G ist Kontrollmatrix für den Dualcode von $C^{\perp}$, d.h. für $C^{\perp\perp} = C$.

Generatormatrix und Kontrollmatrix

Korollar Generatormatrix und Kontrollmatrix

Sei C ein $[n, k]$-Linearcode über mit Generatormatrix G.
Eine $(n-k) \times n$-Matrix P mit linear unabhängigen Zeilen ist genau dann eine Kontrollmatrix von C, wenn $PG^t = O$.

Aus der Definition der Kontrollmatrix, $\mathbf{x}P^t = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in C$, also insbesondere für die Elemente einer Basis. Es folgt $GP^t = O$ (und $PG^t = O$).
Nach Definition und Satz Eigenschaften dualer Codes II.2 sind die Zeilen einer Kontrollmatrix linear unabhängig.
Gelte umgekehrt $PG^t = O$, dann sind nach dem ersten Teil alle Zeilen von H Codewörter von $C^\perp$ und P Kontrollmatrix.

Konstruktion eines dualen Codes

Bsp: $C = \langle 1011, 0110 \rangle$.

- Parity Check Gleichungen

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 0 \end{array}$$

- Wählen beliebige Werte für x_3, x_4 und lösen nach x_1, x_2 auf.
- $C^\perp = \{0000, 1001, 1110, 0111\} = \langle 1001, 1110 \rangle$
- $\dim(C^\perp) = 4 - \dim(C) = 2$

Bsp: $C = \langle 1100, 0011 \rangle$

- Codeworte 1100 und 0011 sind orthogonal.
- Beide Codeworte 1100, 0011 sind orthogonal zu sich selbst.
- D.h. $C \subseteq C^\perp$ und $\dim(C) = 2 = \dim(C^\perp)$.
- Damit ist $C^\perp = C$. C ist ein *selbst-dualer Code*.

Präsentation eines Codes durch G oder P

Vorteil der Präsentation durch Generatormatrix:

- Einfache Generierung aller Codeworte von C

Vorteil der Präsentation durch Parity Check Matrix:

- Entscheidung, ob ein $\mathbf{x}$ im Code C liegt.

Satz MinimalAbstand via P

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code mit Parity Check Matrix P. Für die MinimalAbstand von C gilt

$$d(C) = \min\{r \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt } r \text{ linear abhängige Spalten in } P\}.$$

Beweis zum MinimalAbstand via Spalten von P

- Sei r die minimale Anzahl von linear abhängigen Spalten.
- Es gibt ein $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n$ mit $w(\mathbf{c}) = r$ und $P \cdot \mathbf{c}^t = \mathbf{0}^t \Leftrightarrow \mathbf{c}P^t = \mathbf{0}$.
- Damit gilt $\mathbf{c} \in C$ und $d(C) \leqslant r$.

- Annahme: $d(C) < r$.
- Sei $\mathbf{c}' \in C$ ein Codewort mit Gewicht $d(C)$. Dann gilt $P \cdot (\mathbf{c}')^t = \mathbf{0}^t$.
- D.h. es gibt $d(C) < r$ linear abhängige Spalten in P.
  (Widerspruch zur Minimalität von r)

Äquivalente lineare Codes

Definition Äquivalenz von linearen Codes

Sei C ein linearer Code mit Generatormatrix G. Die durch Kombination der drei elementaren Matrixoperationen auf G

1. Vertauschen von zwei Zeilenvektoren
2. Vertauschen von zwei Spaltenvektoren
3. Addition eines Zeilenvektors zu einem anderen Zeilenvektor

entstehenden Codes bezeichnen wir als zu C *äquivalente Codes*.

Fakt Systematische Codes

Sei C ein linearer $[n, k]$-Code mit Generatormatrix G. Dann gibt es einen zu C äquivalenten Code C' mit Generatormatrix in linker Standardform $G' = [I_k | M_{k,n-k}]$. C' nennt man *systematischen Code*.

- Für systematische C': $(x_1, \ldots, x_k)G' = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k})$.
- $y_1, \ldots, y_{n-k}$ nennt man die Redundanz der Nachricht.

Umwandlung Generatormatrix in Kontrollmatrix

Satz Konversion von Generatormatrix in Kontrollmatrix

Sei C ein linearer $[n,k]$-Code mit Generatormatrix $G = [I_k|A]$. Dann ist $P = [A^t|I_{n-k}]$ eine Kontrollmatrix für C.

Beweis 1: Direkt aus Korollar Generatormatrix und Kontrollmatrix wenn man merkt dass, per Konstruktion, für die i-te Zeile von G

$$\mathbf{g_i} = (\overbrace{0\ldots1\ldots0}^{k \text{ Stellen, die 1 in der } i\text{-ten}}\ a_{i1}\ldots a_{in-k})$$

und die j-te Spalte von P^t

$$(a_{1j}\ldots a_{kj}\ \overbrace{0\ldots1\ldots0}^{k \text{ Stellen, die 1 in der } j\text{-ten}})$$

gilt

$$\big\langle(0\ldots1\ldots0\,a_{i1}\ldots a_{in-k}),(a_{1j}\ldots a_{kj}\,0\ldots1\ldots0)\big\rangle = a_{ij}+a_{ij} = 0\ . \qquad (*)$$

Beweis 2: Sei C' der Code mit Kontrollmatrix P: Aus $(*)$ folgt $C \subseteq C'$. Es bleibt z.Z., dass $\dim(C) = \dim(C')$. Nun, P hat $n-k$ linear unabhängige Zeilen. D.h. Dualcode $(C')^\perp$ hat Generatormatrix P und Dimension $n-k$.

$$\dim(C') = n - \dim((C')^\perp) = n-(n-k) = k = \dim(C)\ .$$

Syndrome

Definition Syndrom

Sei $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein Code mit Kontrollmatrix P und $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Das Syndrom von $\mathbf{x}$ ist definiert als $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}P^t$.

Satz Standardarrays und Syndrome

Sei C ein linearer Code mit Standardarray A und Kontrollmatrix P. Die Elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$ sind in derselben Zeile von A gdw $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{y})$.

- Sei $\mathbf{x} = \mathbf{f_i} + \mathbf{c_j}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{f_k} + \mathbf{c}_\ell$.
- Es gilt $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{f_i} + \mathbf{c_j}) = S(\mathbf{f_i}) + S(\mathbf{c_j}) = S(\mathbf{f_i})$.
- Analog folgt $S(\mathbf{y}) = S(\mathbf{f_k})$. D.h.

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}) = S(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow S(\mathbf{f_i}) = S(\mathbf{f_k}) \\ &\Leftrightarrow S(\mathbf{f_i} - \mathbf{f_k}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{f_i} - \mathbf{f_k} \in C \Leftrightarrow i = k. \end{aligned}$$

Syndromdecodierung mittels Syndromtabelle

- Decodierung mittels Standardarray: $\mathbf{x} = \mathbf{f_i} + \mathbf{c_j}$ mit Fehlervektor $\mathbf{f_i}$.
- Paarweise verschiedene Fehlervektoren bilden die erste Spalte eines Standardarrays.
- Berechne die folgende Syndromtabelle für C

Fehlervektor	Syndrom
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{f_2}$	$S(\mathbf{f_2})$
$\mathbf{f_3}$	$S(\mathbf{f_3})$
$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{f}_\ell$	$S(\mathbf{f}_\ell)$

Algorithmus Syndromdecodierung

EINGABE: $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$

1. Berechne $S(\mathbf{x})$ und vergleiche mit der Syndromspalte.
2. Falls $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{f_i})$, Ausgabe $\mathbf{c} = \mathbf{x} - \mathbf{f_i}$.

Verbesserte Gilbert-Varshamov Schranke

- Erinnerung Sphere-Covering Schranke: $A(n,d) \geqslant \frac{2^n}{V^n(d-1)}$.
- Idee: Überdecke Raum $\mathbb{F}_2^n$ mit Hammingkugeln vom Radius $d-1$.

Satz Gilbert Varshamov Schranke

Es gibt einen linearen $[n,k,d]$-Code falls

$$2^k < \frac{2^n}{V^{n-1}(d-2)}.$$

Sei k maximal. Es folgt $A(n,d) \geqslant 2^k$.

Bsp: $A(5,3)$

- Sphere-Covering: $A(5,3) \geqslant \frac{2^5}{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}} = 2$
- Gilbert-Varshamov: Es gibt einen linearen $(5,2^k,3)$-Code gdw
$$2^k < \frac{2^5}{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}} = \frac{32}{5}.$$
- $k=2$ ist maximal, d.h. es gibt einen linearen $(5,4,3)$-Code.
- Es folgt $A(5,3) \geq 4$. Wissen bereits, dass $A(5,3) = 4$.

Beweis der verb. Gilbert-Varshamov Schranke

- Konstruiere $((n-k) \times n)$-Kontrollmatrix P, so dass keine $d-1$ Spalten linear abhängig sind.
- Wähle die 1. Spalte von P beliebig in $\mathbb{F}_2^{n-k}$.
- Wahl der i. Spalte von P:
  - Darf keine Linearkombination von $j \leqslant d-2$ der bisherigen $i-1$ Spalten sein.
  - Anzahl der möglichen Linearkombinationen

$$N_i = \sum_{j=1}^{d-2} \binom{i-1}{j}.$$

  - Finden i-te linear unabhängige Spalte in $\mathbb{F}_2^{n-k}$, falls $N_i + 1 < 2^{n-k}$.
- Finden n linear unabhängige Spalten in $\mathbb{F}_2^{n-k}$, falls $N_n + 1 < 2^{n-k}$.
- Es gilt $N_n + 1 = \sum_{j=0}^{d-2} \binom{n-1}{j} = V^{n-1}(d-2)$ und damit die Bedingung

$$V^{n-1}(d-2) < \frac{2^n}{2^k}.$$

7. Woche
Codierung in der Kryptographie

Keine Details über

Hamming Code, Simplex Code, Golay Code, Reed-Reed-Muller Codes, Cyclic Codes. Das Buch von Roman ist eine gute Einführung.

Zwei Kryptographische Anwendungen von Codes.

McEliece Verfahren (1978)

- **Decodieren eines zufälligen linearen Codes ist NP-hart**.
- Verwende linearen Code C mit effizientem Decodierverfahren (z.B. sogenannten Goppa-Code).
- Generatormatrix von C bildet den geheimen Schlüssel.
- C wird in äquivalenten linearen Code C' transformiert.

Algorithmus Schlüsselgenerierung McEliece

1. Wähle linearen $[n, k, d]$-Code C mit Generatormatrix G.
2. Wähle zufällige binäre $(k \times k)$-Matrix S mit $\det(S) = 1$.
3. Wähle zufällige binäre $(n \times n)$-Permutationsmatrix P.
4. $G' \leftarrow SGP$

öffentlicher Schlüssel: G', geheimer Schlüssel S, G, P.

McEliece Verschlüsselung

Algorithmus McEliece Verschlüsselung

EINGABE: Plaintext $\mathbf{m} \in \mathbb{F}_2^k$

1. Wähle zufälligen Fehlervektor $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_2^n$ mit $w(\mathbf{e}) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.
2. $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{m}G' + \mathbf{e}$.

AUSGABE: Ciphertext $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n$

Vorgeschlagene Parameter:

- $[1024, 512, 101]$-Goppacode C.
- Plaintextlänge: 512 Bit, Chiffretextlänge: 1024 Bit.
- Größe des öffentlichen Schlüssels: 512×1024 Bit.

McEliece Entschlüsselung

Algorithmus McEliece Entschlüsselung

EINGABE: Ciphertext $\mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n$

1. $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{c}P^{-1}$.
2. Decodiere $\mathbf{x}$ mittels Decodieralgorithmus für C zu $\mathbf{m}'$.
3. $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m}'S^{-1}$

AUSGABE: Plaintext $\mathbf{m} \in \mathbb{F}_2^k$

- **Korrektheit**:

  $$\mathbf{x} = \mathbf{c}P^{-1} = (\mathbf{m}G' + \mathbf{e}) \cdot P^{-1} = (\mathbf{m}SGP + \mathbf{e}) \cdot P^{-1} = (\mathbf{m}S)G + \mathbf{e} \cdot P^{-1}.$$

- $\mathbf{e} \cdot P^{-1}$ besitzt Gewicht $w(\mathbf{e}P^{-1}) = w(\mathbf{e}) = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.
- Decodierung liefert $\mathbf{m}' = \mathbf{m}S$, d.h. $\mathbf{m} = \mathbf{m}'S^{-1}$.

Stern Identifikationsschema

- Decodieren eines zufälligen linearen Codes ist NP-hart.
- Definiere zufälligen Code mittels zufälliger Parity Check Matrix.

Gegeben: $[n, k]$-Code C mittels $P \in \mathbb{F}_2^{(n-k)\times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$
Gesucht: $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_2^n$ mit $\mathbf{x} - \mathbf{e} = \mathbf{c} \in C$, so dass $w(\mathbf{e})$ minimal ist, d.h. gesucht ist $\mathbf{e}$ minimalen Gewichts mit $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{e}) = \mathbf{e}P^t$.

Algorithmus Stern Schlüsselerzeugung

Globale Parameter:

1. Parity Check Matrix $P \in \mathbb{F}_2^{(n-k)\times n}$ mit linear unabhängigen Zeilen.
2. Gewicht $g \in \mathbb{N}$

Jeder Teilnehmer wählt

1. Geheimer Schlüssel: $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_2^n$ mit $w(\mathbf{e}) = g$
2. Öffentlicher Schlüssel: $S(\mathbf{e}) = \mathbf{e}P^t$

- Vorgeschlagen: $[n, k] = [512, 256]$ und $g = w(\mathbf{e}) = 56$.
- **Idee Identifikation:** Beweise Besitz von $\mathbf{e}$, ohne $\mathbf{e}$ preiszugeben.

Identifikationsverfahren

Algorithmus Stern Identifikation

Prover: Wähle zufällige $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$ und Permutation $\sigma : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$.
Hinterlege beim Verifier (sogenanntes Commitment)

$$c_0 = \sigma(\mathbf{y} + \mathbf{e}), c_1 = \sigma(\mathbf{y}) \text{ und } c_2 = (\sigma, \mathbf{y}P^t).$$

Verifier: Wähle zufälliges $b \in \{0, 1, 2\}$ für Prüfung von $c_i, i \neq b$.

Prover: Falls $b = 0$: Sende $\mathbf{y}$,σ und öffne c_1, c_2.
Falls $b = 1$: Sende $\mathbf{y} + \mathbf{e}, \sigma$ und öffne c_0, c_2.
Falls $b = 2$: Sende $\sigma(\mathbf{y}), \sigma(\mathbf{e})$ und öffne c_0, c_1.

Verifier: Falls $b = 0$: Prüfe Korrektheit von c_1 und c_2.
Falls $b = 1$: Prüfe c_0 und $c_2 = (\sigma, (\mathbf{y} + \mathbf{e})P^t - \mathbf{e}P^t)$.
Falls $b = 2$: Prüfe $c_0 = \sigma(\mathbf{y}) + \sigma(\mathbf{e}), c_1, w(\sigma(\mathbf{e})) = w(\mathbf{e})$.

Korrektheit: Nur Besitzer von **e** bestehen Protokoll.

- **Completeness:** Falls Prover **e** besitzt, akzeptiert Verifier.
- **Soundness:** Falls Prover **e** nicht besitzt, besteht er das Protokoll mit Ws höchstens $\frac{2}{3}$.
- **Strategie 1**: Prover wählt σ, **y** und $\tilde{\mathbf{e}}$ mit Gewicht $w(\tilde{\mathbf{e}})$.
  - Prover besteht nur $b = 1$ nicht, da hier $\tilde{\mathbf{e}}P^t \neq \mathbf{e}P^t$.
- **Strategie 2**: Prover wählt σ, **y** und $\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{e}}$ mit $\tilde{\mathbf{e}}P^t = \mathbf{e}P^t$.
  - Prover besteht nur $b = 2$ nicht, da hier $w(\tilde{\mathbf{e}}) \neq w(\mathbf{e})$.
- Prover wählt **Strategie 1** und **Strategie 2** jeweils mit Ws $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}&\mathcal{W}s(\text{P besteht Protokoll})\\ &= \mathcal{W}s(b \neq 1) \cdot \mathcal{W}s(\textbf{Strategie 1}) + \mathcal{W}s(b \neq 2) \cdot \mathcal{W}s(\textbf{Strategie 2})\\ &= \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

Fakt (Beweis ist nicht-trivial)

Jeder Angreifer mit $\mathcal{W}s > \frac{2}{3}$ liefert Berechnung von **e**.

- Intuitiv: Prover kann nur $b = 1$ und 2 bestehen, falls er **e** kennt.

Zeroknowledge Eigenschaft

- **Zeroknowledge:** Verifier lernt nichts über **e**.
- Verifier lernt für
  - $b = 0$: Zufälliges $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$, unabhängig von **e**.
  - $b = 1$: Zufälliges $\mathbf{y} + \mathbf{e} \in \mathbb{F}_2^n$, da $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$ zufällig ist.
    (D.h. **y** ist One-Time Pad für **e**.)
  - $b = 2$: Zufälliges $\sigma(\mathbf{e}) \in \mathbb{F}_2^n$ mit Gewicht $w(\mathbf{e})$.
- Formaler Zeroknowledge Beweis verwendet Simulator für Prover, ohne dabei **e** zu kennen.

7. Woche
Extra-Material: - Beispiele von Codes

Hamming-Matrix $H(h)$ und Hammingcode $\mathcal{H}(h)$

Wir definieren nun eine Parity-Check Matrix $H(h)$ von einem neuen Code:

- Parametrisiert über die Zeilenanzahl h.
- Spaltenvektoren sind Binärdarstellung von $1, 2, \ldots, 2^h - 1$.
- Bsp :

$$H(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hammingcode $\mathcal{H}(h)$ besitzt die Parity Check Matrix $H(h)$.
- Unabhängig entdeckt von Golay (1949) und Hamming (1950).

k und d bei Hammingcodes

Satz Hammingcode

Der Hammingcode $\mathcal{H}(h)$ mit Kontrolmatrix $H(h)$ ist ein linearer $[n, k, d]$-Code mit den Parametern

$$n = 2^h - 1, k = n - h \text{ und } d = 3.$$

- $H(h)$ enthält die h Einheits-Spaltenvektoren $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_h}$.
  Daraus folgt, die Zeilenvektoren von $H(h)$ sind linear unabhängig.
  D.h. $H(h)$ ist eine Generatormatrix des dualen Codes $\mathcal{H}(h)^\perp$.
  Damit ist $\dim(\mathcal{H}(h)^\perp) = h$ und $k = \dim(\mathcal{H}(h)) = n - h$.
- Je zwei Spalten in $H(h)$ sind paarweise verschieden.
  Die minimale Anzahl von linear abhängigen Spalten ist mindestens 3, d.h. $d(\mathcal{H}(h)) \geqslant 3$.
  Die ersten drei Spalten sind stets linear abhängig, d.h. $d(\mathcal{H}(h)) = 3$.

Decodierung mit Hammingcodes

Satz Korrigieren eines Fehlers

Sei $\mathbf{c} \in \mathcal{H}(h)$ und $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e_i}$ für einen Einheitsvektor $\mathbf{e_i} \in \mathbb{F}_2^{2^h-1}$. Dann entspricht das Syndrom $S(\mathbf{x})$ der Binärdarstellung von i.

- Es gilt $S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{e_i}) = \mathbf{e_i} H(h)^t = (H(h)\mathbf{e_i}^t)^t$.
- D.h. $S(\mathbf{x})$ entspricht der i-ten Spalte von $H(h)$, die wiederum die Binärcodierung von i ist.

Bsp:

- Verwenden $\mathcal{H}(3)$ und erhalten $\mathbf{x} = 1000001$.

$$S(\mathbf{x}) = (1000001)H(3)^t = (110).$$

- Da 110 die Binärcodierung von 6 ist, codieren wir zum nächsten Nachbarn 1000011.

Simplex Code: Dualcode des Hammingcodes

Satz Simplex Code

Der Dualcode des Hammingcodes $\mathcal{H}(h)$ wird als Simplex Code $\mathcal{S}(h)$ bezeichnet. $\mathcal{S}(h)$ ist ein $[2^h-1, h, 2^{h-1}]$-Code, bei dem für *alle verschiedenen* $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathcal{S}(h)$ gilt, dass $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2^{h-1}$.

- Hamming-Matrix $H(h)$ ist Generatormatrix von $\mathcal{S}(h) = \mathcal{H}(h)^{\perp}$.
- Da $\dim(\mathcal{S}(h)) = n - \dim(\mathcal{H}(h))$, ist $S(h)$ ein $[2^h-1, h]$-Code.
- Es gilt $H(h+1) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 \quad \ldots \quad 0 & 1 & 1 \quad \ldots \quad 1 \\ \hline & 0 & \\ H(h) & \vdots & H(h) \\ & 0 & \end{array}\right)$.
- Sei $\bar{\mathbf{c}}$ das Komplement von $\mathbf{c}$ ist. Dann gilt

$$\mathcal{S}(h+1) = \{\mathbf{c}0\mathbf{c} | \mathbf{c} \in \mathcal{S}(h)\} \cup \{\mathbf{c}1\bar{\mathbf{c}} | \mathbf{c} \in \mathcal{S}(h)\}.$$

Abstand 2^{h-1} zwischen zwei Worten im Simplex Code

Beweis von $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2^{h-1}$ per Induktion über h

IV $h = 1$:

- $H(1) = (1)$, d.h. $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ und damit $d(0, 1) = 1 = 2^0$.

IS $h \to h + 1$:

- Fall 1: $d(\mathbf{c}0\mathbf{c}, \mathbf{c}'0\mathbf{c}') = 2 \cdot d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$.
- Fall 2: $d(\mathbf{c}1\bar{\mathbf{c}}, \mathbf{c}'1\bar{\mathbf{c}}') = d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') + d(\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}}') = 2 \cdot d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = 2^h$.
- Fall 3:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{c}0\mathbf{c}, \mathbf{c}'1\bar{\mathbf{c}}') &= d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') + 1 + d(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}}') \\ &= d(\mathbf{c}, \mathbf{c}') + 1 + (2^h - 1 - d(\mathbf{c}, \mathbf{c}')) = 2^h. \end{aligned}$$

Der Golay Code $\mathcal{G}_{24}$ (Golay 1949)

- $\mathcal{G}_{24}$ ist ein $[24, 12]$-Code mit Generator-Matrix $G = [I_{12}|A]$ mit

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Der Abstand des Codes $\mathcal{G}_{24}$

Lemma $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^{\perp}$

$\mathcal{G}_{24}$ ist selbst-dual, d.h. $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^{\perp}$.

- Man prüfe nach, dass für je zwei Zeilen $\mathbf{g_i}, \mathbf{g_j}$ aus G gilt $\langle \mathbf{g_i}, \mathbf{g_j} \rangle = 0$.
- D.h. $\mathcal{G}_{24} \subseteq \mathcal{G}_{24}^{\perp}$. Wegen $\dim(\mathcal{G}_{24}) = \dim(\mathcal{G}_{24}^{\perp})$ folgt $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^{\perp}$.

Korollar Alternative Generatormatrix

Die Matrix $[A|I_{12}]$ ist ebenfalls eine Generatormatrix des $\mathcal{G}_{24}$.

- Wegen $G = [I_{12}|A]$ ist $[A^t|I_{24-12}] = [A|I_{12}]$ eine Parity Check Matrix für $\mathcal{G}_{24}$.
- Da $\mathcal{G}_{24} = \mathcal{G}_{24}^{\perp}$ ist $[A|I_{12}]$ ebenso eine Parity Check Matrix für $\mathcal{G}_{24}^{\perp}$.
- Da die Zeilen von $[A|I_{12}]$ linear unabhängig sind, ist $[A|I_{12}]$ eine Generatormatrix von $\mathcal{G}_{24}^{\perp\perp} = \mathcal{G}_{24}$.

Der Abstand des $\mathcal{G}_{24}$

Satz Parameter des $\mathcal{G}_{24}$

$\mathcal{G}_{24}$ ist ein $[24, 12, 8]$-Code.

Zeigen zunächst, dass $w(\mathbf{c}) = 0 \mod 4$ für alle $\mathbf{c} \in C$.

- Für jede Zeile $\mathbf{g_i}$ aus G gilt: $w(\mathbf{g_i}) = 0 \mod 4$.
- Seien $\mathbf{g_i}, \mathbf{g_j}$ Zeilen aus G. Dann gilt

$$w(\mathbf{g_i} + \mathbf{g_j}) = w(\mathbf{g_i}) + w(\mathbf{g_j}) - 2\mathbf{g_i} \cdot \mathbf{g_j}.$$

- $\mathcal{G}_{24}$ ist selbst-dual, d.h. $\mathbf{g_i} \cdot \mathbf{g_j} = 0$. Damit gilt $w(\mathbf{g_i} + \mathbf{g_j}) = 0 \mod 4$.
- D.h. für jedes $\mathbf{c} = (((\mathbf{g_{i_1}} + \mathbf{g_{i_2}}) + \mathbf{g_{i_3}}) + \ldots + \mathbf{g_{i_\ell}})$ folgt $4 | w(\mathbf{c})$.

Zeigen nun, dass $w(\mathbf{c}) > 4$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}$, $\mathbf{c} \neq 0$.

- Damit folgt $w(\mathbf{c}) \geq 8$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}$, $\mathbf{c} \neq 0$.
- Zweite Zeile von G ist Codewort mit Gewicht 8, d.h. $d(\mathcal{G}_{24}) = 8$.

$w(\mathbf{c}) > 4$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{G}_{24}$, $\mathbf{c} \neq 0$

- $\mathbf{c}$ ist Linearkombination von $G_1 = [I_{12}|A]$ bzw. von $G_2 = [A|I_{12}]$.
  Sei $\mathbf{c} = LR$ mit $L, R \in \{0,1\}^{12}$. Es gilt $w(L), w(R) \geq 1$.
  Sei $w(L) = 1$. Dann ist $\mathbf{c}$ eine Zeile von G_1 und damit $w(\mathbf{c}) > 4$.
- Analog folgt für $w(R) = 1$, dass $\mathbf{c}$ Zeile von G_2 ist mit $w(\mathbf{c}) > 4$.
  Sei $w(L) = w(R) = 2$, d.h. $\mathbf{c}$ ist Linearkombination zweier Zeilen.
- Es ist nicht schwer zu prüfen, dass die Summe zweier Zeilen in G_1 bzw G_2 stets Gewicht größer 4 besitzt.

Der Golay Code $\mathcal{G}_{23}$

- $\mathcal{G}_{23}$ entsteht aus $\mathcal{G}_{24}$ durch Entfernen der letzten Spalte in G.

Satz Parameter des $\mathcal{G}_{23}$

Satz $\mathcal{G}_{23}$ ist ein perfekter $[23, 12, 7]$-Code.

- Hammingabstand von $\mathcal{G}_{24}$ beträgt 8, d.h. Zeilen von G bleiben linear unabhängig nach Entfernen der letzten Spalte.
- Daraus folgt $\dim(\mathcal{G}_{23}) = \dim(\mathcal{G}_{24})$.
- $d(\mathcal{G}_{23}) \in \{7, 8\}$. 3. Zeile der Generatormatrix liefert $d(\mathcal{G}_{23}) = 7$.
- Erinnerung: $\mathcal{G}_{23}$ ist perfekt wegen $M = 2^{12} = \frac{2^{23}}{V^{23}\left(\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor\right)}$.

Bedeutung von Hamming- und Golay-Codes

Fakt van Lint, Tietäväinen, Best, Hong

Alle binären nicht-trivialen perfekten Codes C besitzen die Parameter eines Hamming- oder Golay-Codes.

1. Falls C die Parameter eines Golay Codes besitzt, ist C äquivalent zu diesem Golay-Code.
2. Falls C linear ist und die Parameter eines Hamming-Codes besitzt, ist C äquivalent zu diesem Hamming-Code.

Reed-Muller Codes

- Reed-Muller Code $\mathcal{R}(r, m)$ ist definiert für $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r \leqslant m$.
- Betrachten nur Reed-Muller Codes 1. Ordnung $\mathcal{R}(1, m) = \mathcal{R}(m)$.

Definition Rekursive Darstellung von Reed-Muller Codes

1. $\mathcal{R}(1) = \mathbb{F}_2^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.
2. Für $m \geq 1$: $\mathcal{R}(m+1) = \{\mathbf{cc} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\} \cup \{\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$.

- $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(1)$.
- $\mathcal{R}(2) = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1010, 1001, 1111, 1100\}$ mit Generatormatrix

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Parameter der Reed-Muller Codes

Satz Reed-Muller Parameter

$\mathcal{R}(m)$ ist ein linearer $(2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$-Code. Für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(m) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ gilt $w(\mathbf{c}) = 2^{m-1}$.

IA: $m = 1$

- $\mathcal{R}(1)$ ist ein linearer $(2^1, 2^2, 2^0)$-Code. $01, 10$ besitzen Gewicht 2^0.

IS: $m \to m + 1$

- $n = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$.
- $\{\mathbf{cc} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$ und $\{\mathbf{c\bar{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)\}$ sind disjunkt, d.h. $k = 2 \cdot 2^{m+1} = 2^{m+2}$.
- Sei $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(m) \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.
  - Für $\mathbf{cc}$ gilt $w(\mathbf{cc}) = 2w(\mathbf{c}) = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$.
  - Für $\mathbf{c\bar{c}}$ gilt $w(\mathbf{c\bar{c}}) = w(\mathbf{c}) + w(\bar{\mathbf{c}}) = 2^{m-1} + (2^m - 2^{m-1}) = 2^m$.
- Für $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{c\bar{c}} = \mathbf{01}$ mit $w(\mathbf{01}) = 2^m$.
- Für $\mathbf{c} = \mathbf{1}$ gilt $\mathbf{c\bar{c}} = \mathbf{10}$ mit $w(\mathbf{10}) = 2^m$.

Reed-Muller Generatormatrizen

Satz Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$

Sei R_m eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$. Dann ist

$$R_{m+1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{3}{c|}{R_m} & \multicolumn{3}{c}{R_m} \end{array}\right)$$

eine Generatormatrix für $\mathcal{R}(m+1)$.

- **Ann.**: $\exists$ nicht-triviale Linearkombination, die **0** liefert.
- Linearkombination kann nicht nur die erste Zeile enthalten.
- D.h. es gibt eine nicht-triviale Linearkombination der Zeilen $2 \dots m+2$, die den Nullvektor auf der ersten Hälfte liefert. (Widerspruch: R_m ist Generatormatrix für $\mathcal{R}(m)$.)
- Sei C der Code mit Generatormatrix R_{m+1}.
- Für $\mathbf{c} \in \mathcal{R}(m)$ gilt: $\mathbf{cc} \in C$ und $\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}} \in C$. D.h. $\mathcal{R}(m+1) \subseteq C$.
- $\dim(C) = m+1 = \dim(\mathcal{R}(m+1))$ und damit $C = \mathcal{R}(m+1)$.

Charakterisierung der Generatormatrizen

Bsp:

$$R_3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Streiche Einserzeile aus R_m. Dann

- besitzen die Spaltenvektoren Länge m und
- bestehen aus Binärcodierungen von $0, 1, \ldots, 2^m - 1$.

Vergleich von Hamming, Simplex und Reed-Muller Codes

	$\mathcal{H}(m)$	$\mathcal{S}(m)$	$\mathcal{R}(m)$
Codewortlänge	$2^m - 1$	$2^m - 1$	2^m
Anzahl Codeworte	2^{2^m-1-m}	2^m	2^{m+1}
Abstand	3	2^{m-1}	2^{m-1}

Decodierung von Reed-Muller Codes

- $\mathcal{R}(m)$ kann $\left\lfloor \frac{2^{m-1}-1}{2} \right\rfloor = 2^{m-2} - 1$ Fehler korrigieren.
- Syndrom-Tabelle besitzt $\frac{2^n}{M} = \frac{2^{2^m}}{2^{m+1}} = 2^{2^m-m-1}$ Zeilen.

Bsp: $\mathcal{R}(3)$ ist 1-fehlerkorrigierend.

$$R_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ \mathbf{r_3} \\ \mathbf{r_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathbf{c} = \alpha_1\mathbf{r_1} + \alpha_2\mathbf{r_2} + \alpha_3\mathbf{r_3} + \alpha_4\mathbf{r_4}$. Es gilt

- $c_1+c_5 = \alpha_1(r_{11}+r_{15})+\alpha_2(r_{21}+r_{25})+\alpha_3(r_{31}+r_{35})+\alpha_4(r_{41}+r_{45}) = \alpha_1$
- $c_2+c_6 = \alpha_1(r_{12}+r_{16})+\alpha_2(r_{22}+r_{26})+\alpha_3(r_{32}+r_{36})+\alpha_4(r_{42}+r_{46}) = \alpha_1$
- Ebenso $\alpha_1 = c_3 + c_7 = c_4 + c_8$.

Mehrheitsdecodierung

- Suche für jede Zeile i Spaltenpaar (u, v), so dass sich die Spalten u, v nur in der i-ten Zeile unterscheiden. Liefert Gleichung für α_i.
- Für Zeile 1: $(1,5), (2,6), (3,7), (4,8)$, d.h. im Abstand 4.
- Für Zeile 2: $(1,3), (2,4), (5,7), (6,8)$, d.h. im Abstand 2.
- Für Zeile 3: $(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)$, d.h. im Abstand 1.
- Für Zeile 4: nicht möglich.

- Erhalten für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jeweils 4 Gleichungen in verschiedenen c_i.
- Falls $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e_i}$, ist genau 1 von 4 Gleichungen inkorrekt.

Algorithmus Mehrheitsdecodierung Reed-Muller Code $\mathcal{R}(m)$

1. Bestimme $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ per Mehrheitsentscheid.
2. Berechne $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{r_i}$.
3. Falls $w(\mathbf{e}) \leqslant 2^{m-2} - 1$, decodiere $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$. (d.h. $\alpha_{m+1} = 0$)
4. Falls $w(\bar{\mathbf{e}}) \leqslant 2^{m-2} - 1$, decodiere $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \bar{\mathbf{e}}$. (d.h. $\alpha_{m+1} = 1$)

Beispiel Mehrheitsdecodierung

- Verwenden $\mathcal{R}(3)$ und erhalten $\mathbf{x} = 11011100$.
  - $\alpha_1 = x_1 + x_5 = 0$
  - $\alpha_1 = x_2 + x_6 = 0$
  - $\alpha_1 = x_3 + x_7 = 0$
  - $\alpha_1 = x_4 + x_8 = 1$
- Mehrheitsentscheid liefert $\alpha_1 = 0$.
  - $\alpha_2 = x_1 + x_3 = 1$
  - $\alpha_2 = x_2 + x_4 = 0$
  - $\alpha_2 = x_5 + x_7 = 1$
  - $\alpha_2 = x_6 + x_8 = 1$
- Mehrheitsentscheid liefert $\alpha_2 = 1$ und analog $\alpha_3 = 0$.
- $\mathbf{e} = \mathbf{x} - 0 \cdot \mathbf{r_1} - 1 \cdot \mathbf{r_2} - 0 \cdot \mathbf{r_3} = 11011100 - 00110011 = 11101111$.
- $w(\bar{\mathbf{e}}) \leqslant 1$, d.h. $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \bar{\mathbf{e}} = 11001100$.

8. Woche
Quadratische Reste und Anwendungen

Quadratische Reste

Definition Quadratischer Rest

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Element $a \in \mathbb{Z}_n$ heißt *quadratischer Rest* in $\mathbb{Z}_n$, falls es ein $b \in \mathbb{Z}_n$ gibt mit $b^2 = a \bmod n$. Wir definieren

$QR_n = \{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid a \text{ ist ein quadratischer Rest }\}$ und $QNR_n = \mathbb{Z}_n^* \setminus QR$.

Lemma Anzahl quadratischer Reste in primen Restklassen

Sei $p > 2$ prim. Dann gilt $|QR_p| = \frac{|\mathbb{Z}_p^*|}{2} = \frac{p-1}{2}$.

- Sei $a \in QR_p$. Dann gilt $a = b^2 = (-b)^2$.

$\Rightarrow$ jeder quadratische Rest besitzt $\geqslant 2$ Quadratwurzeln.

- Da $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist, besitzt das Polynom $p(x) = x^2 - a$ hat höchstens zwei Nullstellen in $\mathbb{F}_p$. D.h. a hat $\leqslant 2$ Quadratwurzeln.
- Damit bildet $f : \mathbb{Z}_p^* \to QR, x \mapsto x^2 \mod p$ jeweils genau zwei Elemente $\pm b$ auf einen quadratischen Rest $a \in QR$ ab.

$\Rightarrow$ genau die Hälfte der Elemente in $\mathbb{Z}_p^*$ ist in QR.

Das Legendre Symbol

Definition Legendre Symbol

Sei $p > 2$ prim und $a \in \mathbb{N}$. Das *Legendre Symbol* ist definiert als

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p|a \\ 1 & \text{falls } (a \bmod p) \in QR_p \\ -1 & \text{falls } (a \bmod p) \in QNR_p. \end{cases}$$

Notation, Fakte (aus DiMa I)

$\mathbb{F}_p := \left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}, +, \cdot, 0, 1\right)$ Körper.

Die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_p^* = \left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^*$ ist zyklisch.

Berechnung des Legendre Symbols

Satz

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p.$$

Beweis

1. Für $p|a$ sind beide Seiten Null. Gelte also $p \nmid a$.
2. Da $a^{p-1} = 1 \bmod p$, folgt $a^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$.
3. Sei g Generator von $\mathbb{Z}_p^*$ und $a = g^j$ für ein $j \in \mathbb{Z}_{p-1}$.
4. Es gilt für die linke Seite $a \in QR_p$ gdw. j gerade ist.
5. Andererseits $a^{\frac{p-1}{2}} = g^{\frac{j(p-1)}{2}} = 1$ gdw $p-1$ teilt $\frac{j(p-1)}{2}$.
6. Damit ist die rechte Seite ebenfalls 1 gdw j gerade ist.

Das Legendresymbol lässt sich in Zeit $\mathcal{O}(\log a \log^2 p)$ berechnen.

Eigenschaften des Legendre Symbols

Eigenschaften Quadratischer Reste mod p

1. Multiplikativität: $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
2. $(QR_p, \cdot)$ ist eine multiplikative Gruppe.
3. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{für } p = \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & \text{für } p = \pm 3 \bmod 8. \end{cases}$

1. Zwei Beweise:
   1. 1. Beweis: $\left(\frac{ab}{p}\right) = (ab)^{\frac{p-1}{2}} \bmod p = a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p \cdot b^{\frac{p-1}{2}} \bmod p = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.
   2. 2. Beweis: Schreibe $a = g^j$ und $b = g^k$. Dann $ab = g^{j+k}$. Wenn j, k beide gerade (a, b Quadrate) dann $j + k$ gerade (also ab Quadrat), usw ...
2. Es bleibt zu Zeigen, dass $a \in QR \Rightarrow a^{-1} \in QR$. Wieder zwei Beweise.
   1. 1. Beweis: $a = g^j$, also $a^{-1} = g^{p-1-j}$. j gerade $\Rightarrow p - 1 - j$
   2. 2. Beweis: $a = b^2$, und $b \neq 0$. Also $\exists\, b^{-1} \Rightarrow (b^{-1})^2 = a^{-1} \Rightarrow a^{-1} \in QR$.
3. ohne Beweis (nicht-trivial)

Das Quadratische Reziprozitätsgesetz

Satz Quadratisches Reziprozitätsgesetz (Gauß)

Seien $p, q > 2$ prim. Dann gilt

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{p}{q}\right) & \text{für } p = q = 3 \bmod 4 \\ \left(\frac{p}{q}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

ohne Beweis (nicht-trivial)

- Liefert alternativen Algorithmus zur Berechnung des Legendre Symbols.
- **Bsp:**

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{11}\right) &= \left(\frac{3}{11}\right) \cdot \left(\frac{2}{11}\right) = -\left(\frac{11}{3}\right) \cdot (-1) \\ &= -\left(\frac{2}{3}\right) \cdot (-1) = -(-1) \cdot (-1) = (-1). \end{aligned}$$

- D.h. 6 ist quadratischer Nichtrest in $\mathbb{Z}_{11}^*$.
- Benötigen Primfaktorzerlegung, um das QR-Gesetz anzuwenden.

Das Jacobi Symbol

Definition Jacobi Symbol

Sei $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \in \mathbb{N}$ ungerade und $a \in \mathbb{N}$. Dann ist das *Jacobi Symbol* definiert als

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{e_k}.$$

- **Warnung:** $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ *impliziert nicht, dass* $a \in QR_n$ *ist!!!*
- Bsp: $\left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = (-1)(-1) = 1$.
- D.h. $2 \in QNR_3$ und $2 \in QNR_5$. Damit besitzt $x^2 = 2$ weder Lösungen modulo 3 noch modulo 5.
- Nach CRT besitzt $x^2 = 2 \bmod 15$ ebenfalls keine Lösung.

Verallgemeinerungen für das Jacobi Symbol

Satz

Für alle ungeraden m, n gilt

1. $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$.
2. $\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}} \left(\frac{n}{m}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{n}{m}\right) & \text{für } m = n = 3 \bmod 4 \\ \left(\frac{n}{m}\right) & \textit{sonst}. \end{cases}$.

Wir beweisen hier nur das Analog des Reziprozitätsgesetzes.

- Falls $\mathrm{ggT}(m, n) > 1$, sind beide Seiten 0. Sei also $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.
- Schreiben Primfaktorzerlegung $m = p_1 \dots p_r$ und $n = q_1 \dots q_s$. (p_i's und q_j's können dabei jeweils mehrmals auftreten)
- Wandeln $\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{i,j} \left(\frac{p_i}{q_j}\right)$ zu $\left(\frac{n}{m}\right) = \prod_{i,j} \left(\frac{q_j}{p_i}\right)$ durch rs-malige Anwendung des Reziprozitätsgesetzes.
- Anzahl (-1) entspricht Anzahl Paare (i, j) mit $p_i = q_j = 3 \bmod 4$.
- D.h. $\left(\frac{m}{n}\right) = -\left(\frac{n}{m}\right)$ gdw. ungerade viele p_i, g_j kongruent 3 mod 4.
- Es gibt ungerade viele $p_i, g_j = 3 \bmod 4$ gdw. $m = n = 3 \mod 4$ ist.

Rekursive Berechnung des Jacobi Symbols

Algorithmus Jacobi-Symbol

EINGABE: m, n mit n ungerade

1. Falls $ggT(m,n) > 1$, Ausgabe 0.
2. Sei $m = 2^k m'$ mit m' ungerade.
3. Ausgabe $(-1)^{\frac{k(n^2-1)}{8}} \cdot (-1)^{\frac{(m'-1)(n-1)}{4}} \cdot \text{Jacobi-Symbol}(n \bmod m', m')$

AUSGABE: $\left(\frac{m}{n}\right)$

Bsp: $\left(\frac{14}{15}\right) = \left(\frac{2}{15}\right) \cdot \left(\frac{7}{15}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{15 \bmod 7}{7}\right) = (-1).$

- **Laufzeit:** Analog zum Euklidischen Algorithmus: $\mathcal{O}(\log \max\{m,n\})$ rekursive Aufrufe.
- Jeder Aufruf kostet $\mathcal{O}(\log^2 \max\{m,n\})$.
- **Korrektheit:** Für ungerades n gilt
$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{m'}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^k \cdot (-1)^{\frac{(m'-1)(n-1)}{4}} \left(\frac{n \bmod m'}{m'}\right).$$

Das Quadratische Reste Problem

Definition Pseudoquadrate

Sei $N = pq$ mit p, q prim. Eine Zahl a heißt *Pseudoquadrat* bezüglich N, falls

$$\left(\frac{a}{N}\right) = 1 \quad \text{und} \quad a \notin QR_N.$$

Wir definieren die Sprache

$$\text{QUADRAT} := \{a \in \mathbb{Z}_N^* \mid a \in QR_N\}.$$

Sprache = Teilmenge der Menge aller Worte über einem Alfabet.
Sprache entscheiden = bestimmen, ob Wort in Sprache ist.
Distinguisher = Entscheider = Algorithmus, der entscheidet.

- Für alle Pseudoquadrate a gilt: $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right) = (-1)$.
- D.h. die Sprache QUADRAT kann effizient entschieden werden, falls p, q bekannt sind. Im Allgemeinen ist nur N bekannt.

Quadratische Reduositätsannahme (QR-Annahme)

Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus, der QUADRAT entscheidet.

Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N^*$

Satz Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N^*$

Sei $N = pq$ mit p, q prim und $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$ (sogenannte Blum-Zahl). Dann besitzt jedes $a = x^2 \in QR_N$ genau eine Quadratwurzel in QR_N, die sogenannte Hauptwurzel.

- Die Lösungen des Gleichungssystems $\begin{cases} y \equiv \pm x \bmod p \\ y \equiv \pm x \bmod q \end{cases}$ liefern mittels Chinesischem Restsatz 4 Lösungen in $\mathbb{Z}_N^*$.
- Eine Lösung y ist in QR_N gdw sie in $QR_p \times QR_q$ (d.h. wenn y mod p,bzw. y mod q Quadrat mod p, bzw. q ist).
- Betrachten Lösung modulo p (analog mod q): Es ist $\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{-x}{p}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{-x}{p}\right)$ da $p = 3 \bmod 4$.
- D.h. $\left(\frac{x}{p}\right) = -\left(\frac{-x}{p}\right)$ und entweder x oder $-x$ ist in QR_p.
- Damit ist genau eine der 4 Lösungen in QR_N, nämlich die Lösung von $\begin{cases} y \equiv \epsilon_p x \bmod p \\ y \equiv \epsilon_q x \bmod q \end{cases}$ mit $\epsilon_p, \epsilon_q \in \{\pm 1\}$ und $\epsilon_p x$ bzw. $\epsilon_q x \in QR_p$ bzw. QR_q.

Berechnen von Quadratwurzeln modulo p

Satz Quadratwurzeln mod p

Sei p prim, $p = 3 \bmod 4$ und $a \in QR_p$. Dann sind die beiden Quadratwurzeln von a von der Form

$$x = \pm a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p, \quad \text{wobei } a^{\frac{p+1}{4}} \in QR_p.$$

- Es gilt

$$x^2 = a^{\frac{p+1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot a = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot a = a \bmod p.$$

- Ferner gilt $a^{\frac{p+1}{4}} \bmod p \in QR_p$ wegen

$$\left(\frac{a^{\frac{p+1}{4}}}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{p+1}{4}} = 1.$$

D.h. Quadratwurzeln können in Zeit $\mathcal{O}(\log^3 p)$ berechnet werden.

Kryptographische Anwendungen von Quadratischen Resten.

1. Blum-Blum-Shub (BBS) Pseudozufallsgenerator

Korollar vom Satz Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N^*$

Die Abb. $f : QR_N \to QR_N, x \mapsto x^2 \bmod N$ ist eine Bijektion auf QR_N.

- (k, ℓ) Pseudozufallsgeneratoren generieren aus k Zufallsbits eine Sequenz von $\ell > k$ Zufallsbits.
- Der (k, ℓ) BBS Generator verwendet obige Bijektion.

Algorithmus BBS Pseudozufallsgenerator (1986)

EINGABE: $N = pq$ Blumzahl der Bitlänge $|N| = k$,
1^ℓ mit $\ell \in \mathbb{N}$ und $\ell > k$

1. Wähle $a \in \mathbb{Z}_N^*$ und setze $s_0 = a^2 \bmod N$.
2. For $i = 1$ to ℓ
   1. Setze $s_i \leftarrow s_{i-1}^2 \bmod N$. Gib $z_i = s_i \bmod 2$ aus.

AUSGABE: $(z_1, \ldots, z_\ell) \in \{0,1\}^\ell$.

Laufzeit: $\mathcal{O}(\ell \log^2 N)$, d.h. polynomiell in der Eingabelänge.

Die Sicherheit des BBS Generators

Sicherheit: Man kann die Verteilung der $(z_1, \ldots, z_\ell)$ nicht von der uniformen Verteilung auf $\{0,1\}^\ell$ unterscheiden.

Man kann folgendes zeigen:

- Sei A ein polynomieller Unterscheider für $(z_1, \ldots, z_\ell)$.
- Dann gibt es einen polyn. Algorithmus B, der $s_0 \bmod 2$ berechnet.

Satz Sicherheit des BBS Generators

Die Ausgabe des BBS Generators ist von der Gleichverteilung in polynomieller Zeit ununterscheidbar unter der QR-Annahme.

- Annahme: $\exists$ polyn. Unterscheider A für den BBS Generator.
- Sei B ein Algorithmus, der $s_0 \bmod 2$ berechnet.
- Zeigen, dass dann ein polyn. Algorithmus für QUADRAT existiert. (Widerspruch zur Quadratischen Residuositätsannahme)

Entscheiden der Sprache QUADRAT

Algorithmus für QUADRAT

EINGABE: $a \in \mathbb{Z}_N^*$ mit $\left(\frac{a}{N}\right) = 1$

1. Setze $s_0 \leftarrow a \bmod N$.
2. Berechne $(z_1, \ldots, z_\ell)$ mittels BBS Generator.
3. Berechne $z_0 \leftarrow B(z_1, \ldots, z_\ell)$.
4. Falls $z_0 = (a \bmod 2)$, Ausgabe "$x \in QR_N$".
   Sonst Ausgabe "$x \notin QR_N$".

Laufzeit: $\mathcal{O}(\ell \cdot \log^2 N + T(B))$

Korrektheit:

- Wegen $\left(\frac{a}{N}\right) = 1$ ist entweder a oder $(-a) = N - a$ in QR_N.
- D.h. a oder $(-a)$ ist eine Hauptwurzel von $s_1 = a^2 \bmod N$.
- Genau eine der beiden Zahlen $a, (-a)$ ist gerade.
- z_0 ist das unterste Bit der Hauptwurzel von $s_1 = a^2 \bmod N$.
- D.h. a ist eine Hauptwurzel gdw z_0 und $a \bmod 2$ übereinstimmen.

2. Probabilistische Verschlüsselung

Parameter des Goldwasser-Micali Kryptosystems (1984):

- Sei $N = pq$.
- Sei $a \in \mathbb{Z}_N^*$ ein Pseudoquadrat (falls N Blumzahl, kann man $N - 1$ nehmen).
- Verschlüsselt werden Bits $m \in \{0, 1\}$.

Goldwasser-Micali Kryptosystem

1. Verschlüsselung von m unter Verwendung von N, a.
   - Wähle $r \in \mathbb{Z}_N^*$.
   - Berechne $e(m, r) = a^m r^2 \bmod N$.
2. Entschlüsselung von $c = e(m, r)$ unter Verwendung von p, q.
   - Berechne $\left(\frac{c}{p}\right) = c^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$.
   - Setze $m = d(c) = \begin{cases} 0 & \text{falls } c \in QR_N, \text{ d.h. falls } \left(\frac{c}{p}\right) = 1. \\ 1 & \text{falls } c \notin QR_N, \text{ d.h. falls } \left(\frac{c}{p}\right) = (-1). \end{cases}$

Sicherheit des Goldwasser-Micali Kryptosystems

Korrektheit

- Falls $m = 0$ ist $c = r^2$ ein zufälliger quadratischer Rest in $\mathbb{Z}_N^*$.
- Falls $m = 1$ ist $c = x \cdot r^2$ ein zufälliges Pseudoquadrat.
- Es gilt $\left(\frac{c}{N}\right) = \left(\frac{a^m r^2}{N}\right) = \left(\frac{a}{N}\right)^m \cdot \left(\frac{r^2}{N}\right) = 1$.
- D.h. entweder $\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{c}{q}\right) = 1$ oder $\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{c}{q}\right) = (-1)$.
- Im ersten Fall ist $c \in QR_N$, im zweiten Fall gilt $c \notin QR_N$.

Laufzeit:

- Verschlüsselung: $\mathcal{O}(\log^2 N)$
- Entschlüsselung: $\mathcal{O}(\log^3 N)$ (verbessert: $\mathcal{O}(\log^2 N)$)

Satz Sicherheit des Goldwasser-Micali Kryptosystems

Das GM Kryptosystem ist sicher unter der QR-Annahme.

- Unterscheiden von Verschlüsselungen von 0 und 1 ist äquivalent zum Entscheiden der Sprache QUADRAT.

2.1. Bit Commitments

Szenario informal:

1. **Commitment-Phase:**
   - Alice platziert ein Bit $b \in \{0, 1\}$ in einem Safe, der in Bob's Zimmer steht. Bob besitzt keinen Safeschlüssel.
   - Bob kann den Safe nicht einsehen, lernt also nichts über b. **(Conceiling Eigenschaft)**
2. **Revealing-Phase:**
   - Alice öffnet den Safe und zeigt Bob das Bit b.
   - Alice kann ihr Bit dabei nicht ändern. **(Binding Eigenschaft)**

Mathematische Modellierung

- Commitment mittels $f : \{0, 1\} \times X \to Y$ für endliche Mengen X, Y.
- Commitment (sog. Blob): Wähle $x \in X$ und sende $f(b, x)$ an Bob.
- Öffnen des Commitments: Sende b und x an Bob.

Bit Commitment via Goldwasser-Micali Kryptosystem

Öffentliche Parameter:

- Blumzahl N, Pseudoquadrat $a \in \mathbb{Z}_N^*$
- $X = Y = \mathbb{Z}_N^*$

Algorithmus Goldwasser-Micali Bit Commitment

1. Commitment-Phase
   - Wähle $x \in \mathbb{Z}_N^*$.
   - Sende Blob $f(b, x) = a^b x^2 \bmod N$ an Bob.
2. Revealing-Phase
   - Sende b, x an Bob.
   - Bob überprüft die Korrektheit von $f(b, x) = a^b x^2 \bmod N$.

Conceiling Eigenschaft:

- Unter der QR-Annahme lernt Bob nichts über das Bit $b \in \{0, 1\}$.

Binding Eigenschaft

Satz

Goldwasser-Micali Commitments besitzen die Binding Eigenschaft.

- **Annahme:** Alice kann Blob $f(b, x)$ für $b = 0$ und $b = 1$ öffnen.
- D.h. Alice kann $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_N^*$ berechnen mit

$$f(b, x) = a^0 x_1^2 = a^1 x_2^2 \bmod N.$$

- Daraus folgt $a = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \bmod N$, d.h. $\frac{x_1}{x_2}$ ist Quadratwurzel von a. (Widerspruch: a ist ein Pseudoquadrat in $\mathbb{Z}_N^*$.)

2.2. Münzwurf über das Telefon

- Bit Commitments haben zahlreiche Anwendungen in kryptographischen Protokollen.
- Exemplarisch hier ein Protokoll für einen fairen Münzwurf.

Algorithmus Münzwurf via Internet

1. Alice sendet Bob Commitment für Bit $b \in \{0, 1\}$.
2. Bob rät ein Bit $b' \in \{0, 1\}$.
3. Alice öffnet ihr Bit. Bob gewinnt gdw $b' = b$.

- Conceiling-Eigenschaft verhindert, dass Bob etwas über b lernt.
- Binding-Eigenschaft verhindert, dass Alice b in $1 - b'$ ändert.

3. Das Blum-Goldwasser Kryptosystem

- Öffentlicher Parameter: Blumzahl $N = pq$
- Klartextraum: $\{0,1\}^\ell$ für ein beliebiges ℓ
- Chiffretextraum: $\{0,1\}^\ell \times \mathbb{Z}_N^*$

Blum-Goldwasser Kryptosystem (1985)

1. Verschlüsselung von $m = (m_1, \ldots, m_\ell) \in \{0,1\}^\ell$ mittels N
   - Wähle $r \in \mathbb{Z}_N^*$.
   - $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_\ell) \leftarrow$ BBS Generator auf $s_0 = r^2 \bmod N$.
   - Berechne $\mathbf{c} = \mathbf{m} \oplus \mathbf{z}$ (Komponentenweise).
   - Berechne $s_{\ell+1} = s_0^{2^{\ell+1}} \bmod N$.
   - AUSGABE: Chiffretext $(\mathbf{c}, s_{\ell+1}) \in \{0,1\}^\ell \times \mathbb{Z}_N^*$.
2. Enschlüsselung von c mittels p, q.
   - Berechne $s_0 \in \mathbb{Z}_N^*$ als Lösung von $\begin{cases} s_0 = s_{\ell+1}^{\left(\frac{p+1}{4}\right)^{\ell+1}} \bmod p \\ s_0 = s_{\ell+1}^{\left(\frac{q+1}{4}\right)^{\ell+1}} \bmod q \end{cases}$.
   - $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_\ell) \leftarrow$ BBS Generator auf $s_0 = r^2 \bmod N$.
   - AUSGABE: $\mathbf{m} = \mathbf{c} \oplus \mathbf{z}$

Laufzeit und Korrektheit

Korrektheit:

- $(z_1, \ldots, z_\ell)$ wird als One-Time Pad für m verwendet.
- Entschlüsselung berechnet $\ell + 1$-malig die Hauptwurzel von $s_{\ell+1}$.
- Dies rekonstruiert die Saat s_0 des BBS Generators.

Laufzeit:

- Verschlüsselung: $\mathcal{O}(\ell \cdot \log^2 N)$
- Entschlüsselung: $\mathcal{O}(\log^3 N + \ell \cdot \log^2 N)$.

Fakt Sicherheit des BG-Kryptosystems

Das Blum Goldwasser Kryptosystem ist sicher unter der Annahme, dass Blumzahlen $N = pq$ schwer zu faktorisieren sind.

9. Woche: Elliptische Kurven - Gruppenarithmetik

Elliptische Kurven

Definition Elliptische Kurve

Eine **elliptische Kurve** E über dem Körper K ist eine „nichtsinguläre“ Kurve, gegeben durch eine Gleichung der Form

$$E \quad : \quad y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

oder, mit anderen Worten

$$F(x, y) = y^2 + a_1xy + a_3y - (x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6)$$

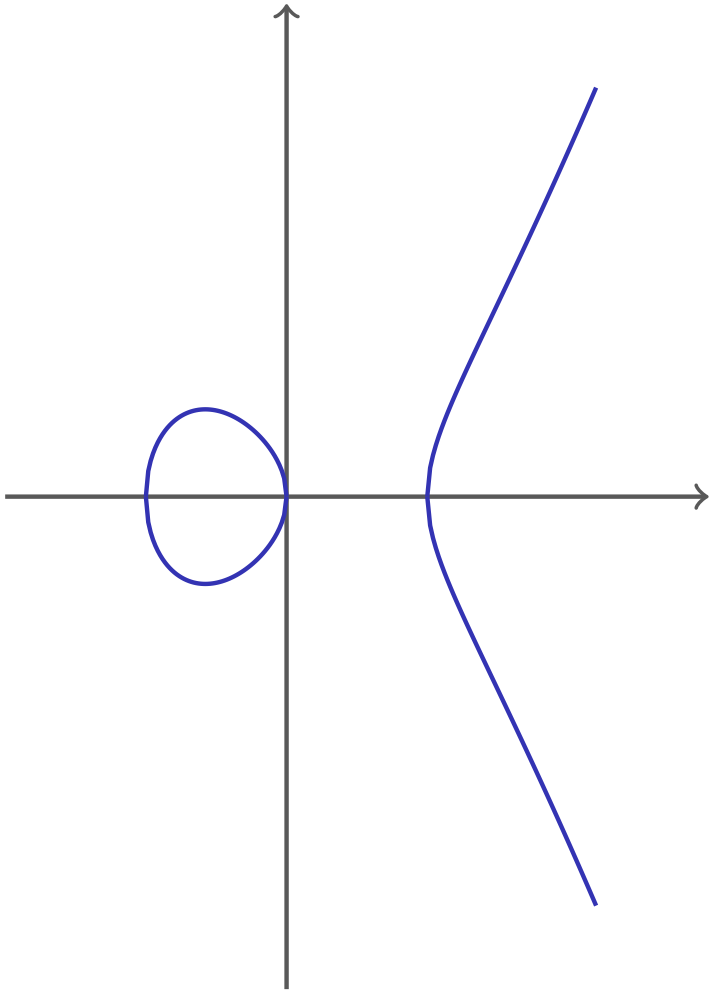
wobei a_1, a_2, a_3, a_4 und a_6 Elemente aus K sind.

Wie sehen solche Kurven aus?

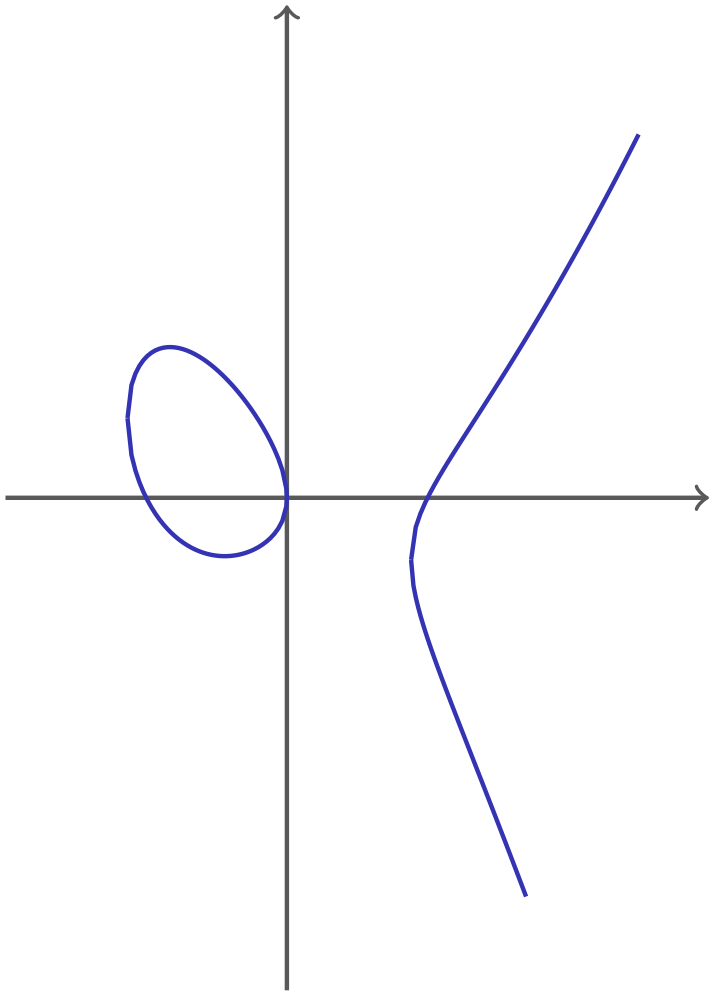
Was bedeutet *singulär* oder *nichtsingulär*?

Elliptische Kurven (über $\mathbb{R}$) I

$$y^2 = x^3 - x$$

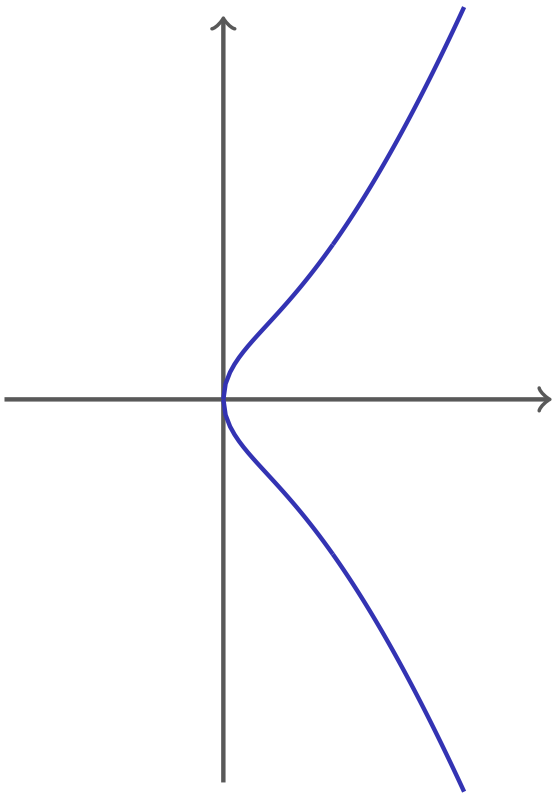


$$y^2 + xy = x^3 - x - 1/4$$

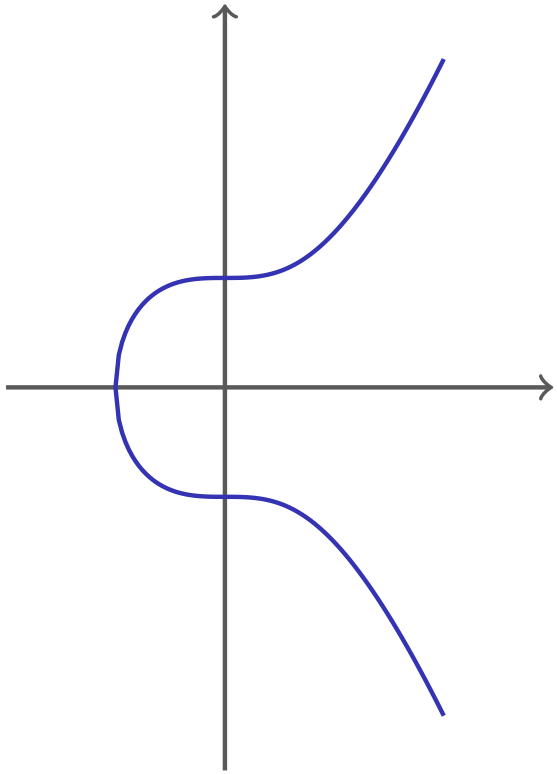


Elliptische Kurven (über $\mathbb{R}$) II

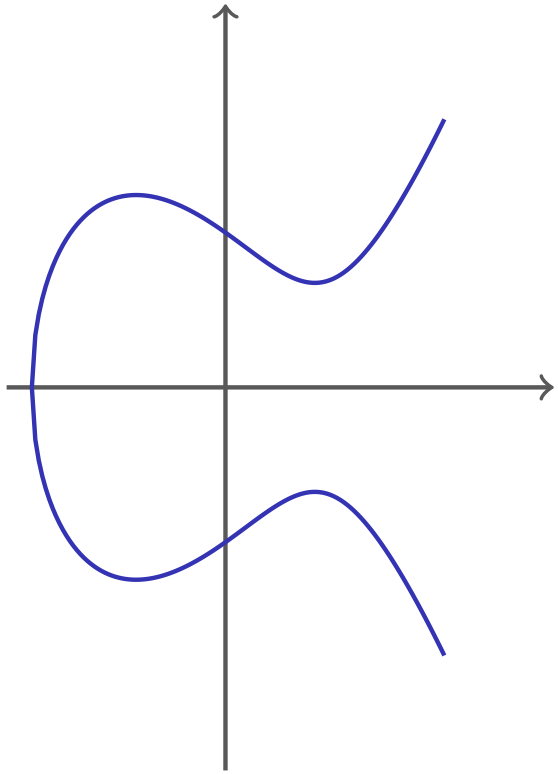
$y^2 = x^3 + x$



$y^2 = x^3 + 1$

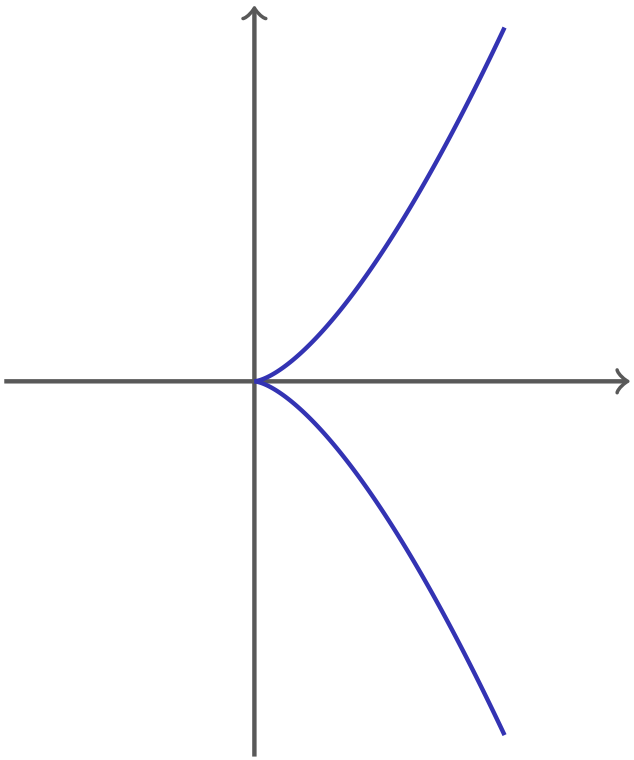


$y^2 = x^3 - 2x + 2$

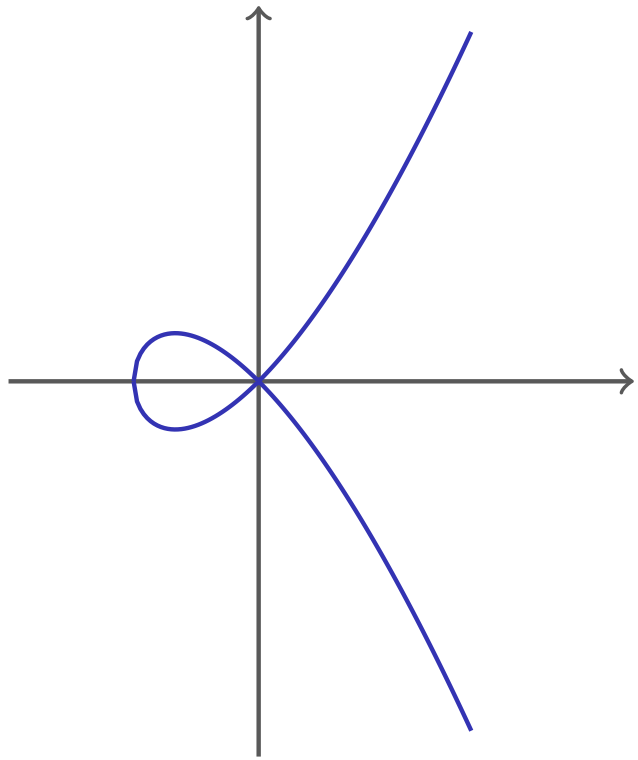


Keine Elliptischen Kurven (über $\mathbb{R}$)

$y^2 = x^3$



$y^2 = x^3 + x^2$



Man beachte: In diesen zwei Fällen ist die Tangente an einem Punkt nicht überall eindeutig definiert. Hier ist dieser Punkt der Ursprung. Das ist ein *singulärer Punkt*. Formale Definition folgt.

Singuläre Elliptische Kurve

Definition Singularität

Eine Kurve, definiert über dem Körper K durch eine Gleichung $F(X, Y) = 0$ (wobei $F(X, Y)$ irreduzibel über dem algebraischen Abschluss $\bar{K}$ von K ist) heisst *singulär* in einem Punkt (x_0, y_0) (auf der Kurve), falls beide Ableitungen in dem Punkt verschwinden, d.h.

$$F(x_0, y_0) = 0 \ , \ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \ .$$

Eine Kurve heisst *nichtsingulär*, wenn in $\bar{K}$ kein Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}^2(\bar{K})$ existiert für den beide Ableitungen verschwinden.

Eine Gleichung obiger Form nennt man *Weierstrass-Gleichung*.

Punkte auf der Kurve I

Sei, der Einfachheits halber, E/K definiert durch die Gleichung

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

(„$/K$" bedeutet: mit Koeffizienten in K).
Dann existiert ein Punkt mit Koordinaten in K (kurz: ein K-Punkt), mit x-Koordinate gleich $x_0 \in K$, wenn die Gleichung

$$y^2 = x_0^3 + ax_0 + b$$

mindestens eine Lösung besitzt. Drei Fälle:

1. $x_0^3 + ax_0 + b = 0$, d.h. x_0 ist eine Nullstelle von $x^3 + ax + b$: nur ein solcher K-Punkt existiert, dessen y-Koordinate gleich 0 ist;
2. $x_0^3 + ax_0 + b \neq 0$ und Quadrat: zwei solche Punkte;
3. $x_0^3 + ax_0 + b \neq 0$ und Nicht-Quadrat: kein solcher Punkt.

Punkte auf der Kurve II

Falls $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (Primkörper), dies bedeutet, es existieren genau

$$1 + \left(\frac{x_0^3 + ax_0 + b}{p} \right)$$

$\mathbb{F}_p$-Punkte mit x-Koordinate gleich x_0. Infolgedessen hat $E(\mathbb{F}_p)$

$$\sum_{x_0 \in \mathbb{F}_p} \left(1 + \left(\frac{x_0^3 + ax_0 + b}{p} \right) \right)$$

Punkte in $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$.

Nun, man kann sich vorstellen, dass die Abbildung $x \mapsto x^3 + ax + b$ „unabhäbgig" ist von der Eigenschaft „quadratischer Rest sein", d.h. man erwartet ungefähr p Punkte auf der Kurve, nicht $2p$ oder 0.

Punkte auf der Kurve III: Hasse-Weil

In der Tat gilt das für *alle* elliptische Kurven über *allen* endlichen Körpern:

Satz von Hasse-Weil

Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen und sei $E/\mathbb{F}_q$ eine elliptische Kurve. Dann:

$$|\#E(\mathbb{F}_q) - (q+1)| \leqslant 2\sqrt{q} \ .$$

Mit anderen Worten: die Anzahl der Punkte ist $q+1$ mit einem „Fehler" von maximal $2\sqrt{q}$.

Beweis: schwierig (braucht Zahlentheorie und Algebraische Geometrie).

Supersinguläre und gewöhnliche Kurven

Eher für die Neugierigen: Eine EK über $\mathbb{F}_q$ ($q = p^d$) heißt *supersingulär*, falls $\#E = q + 1 - t$ mit $p \mid t$. Sonst heißt die elliptische Kurve *gewöhnlich*.
Eine elliptische Kurve über einem Primkörper $\mathbb{F}_p$ ist genau dann gewöhnlich, wenn sie $p+1$ Punkte hat.

Isomorphe Kurven

Definition: Isomorphie von Kurven in Weierstrass Form

Zwei Kurven E_1, E_2 über K, gegeben als Weierstrass Gleichungen

$$\begin{aligned} E_1 : y^2 + a_1xy + a_3y &= x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \\ E_2 : y^2 + \bar{a}_1xy + \bar{a}_3y &= x^3 + \bar{a}_2x^2 + \bar{a}_4x + \bar{a}_6 \end{aligned}$$

werden als *isomorph über K* bezeichnet, falls $u, r, s, t \in K$ existieren, sodass durch eine Veränderung der Variablen der Form

$$(x, y) \to (u^2x + r, u^3y + u^2sx + t)$$

die eine Gleichung in die andere umgeformt werden kann. Diese Umformung wird *admissible change of variables* genannt.

E_1 ist genau dann singulär wenn E_2 singulär ist. (Übung.)
D.h. E_1 ist genau dann elliptisch wenn E_2 elliptisch ist.

Getwistete Kurven

Zwei elliptische Kurven über K sind getwistet wenn isomorph über eine Körpererweiterung von K aber nicht über K.
Sei K nicht algebraisch abgeschlossen mit char(K) ungerade und $d \in K \setminus K^2$. Also $\sqrt{d} \notin K$.
Dann

$$E_1 \ : \ y^2 = x^3 + ax + b$$

und

$$E_2 \ : \ y^2 = x^3 + \frac{a}{d^2}x + \frac{b}{d^3}$$

sind isomorph über $K(\sqrt{d})$, wobei die isomorphie durch

$$E_1 \to E_2 \ , (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{d}\, x, \frac{1}{d^{3/2}}\, y \right)$$

gegeben ist. Die zwei Kurven sind aber über K *nicht* isomorph.

Vereinfachte Weierstrass-Form

Falls $char(K) \neq 2, 3$, dann kann E, definiert durch

$$E \quad : \quad y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 \ ,$$

durch

$$(x, y) \to \left(x - \frac{1}{3}\, a_2 - \frac{1}{12}\, a_1^2, y - \frac{1}{2}\, a_1\, x + \frac{1}{6}\, a_1\, a_2 + \frac{1}{24}\, a_1^3 - \frac{1}{2}\, a_3 \right)$$

umgeformt werden zu

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad (*)$$

mit $a, b \in K$ wobei

$$a = \frac{1}{2}\, a_1\, a_3 + a_4 - \frac{1}{6}\, a_2\, a_1^2 - \frac{1}{48}\, a_1^4 - \frac{1}{3}\, a_2^2 \ ,$$

$$b = -\frac{1}{6}\, a_1\, a_2\, a_3 + a_6 + \frac{1}{18}\, a_1{}^2 a_2^2 + \frac{1}{72}\, a_1^4 a_2 - \frac{1}{24}\, a_1^3 a_3 + \\ + \frac{1}{4}\, a_3^2 - \frac{1}{3}\, a_4\, a_2 - \frac{1}{12}\, a_4\, a_1^2 + \frac{1}{864}\, a_1^6 + \frac{2}{27}\, a_2^3 \ .$$

Eine Gleichung der Form (*) heisst *Vereinfachte Weierstrass Gleichung* – oder: die Kurve ist in *vereinfachter Weierstrass-Form*.

Singularität für die Vereinfachte Weierstrass-Form

Satz

Sei die Kurve E definitert durch die Gleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ über dem Körper K von Charakteristik $\neq 2, 3$. Dann ist E singulär g.d.w.: $\Delta = 4a^3 + 27b^2 = 0$.

E singulär $\Leftrightarrow$ existiert Lösung vom System $\begin{cases} y^2 = x^3 + ax + b \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + a = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$

Aus der 2. Gleichung ergibt sich $x^2 = -\frac{a}{3}$.

Aus der 3. und 1. Gleichung erhalten wir $y = 0$ und $0 = x^3 + ax + b$.

Dies ist $\Leftrightarrow x(x^2 + a) + b = 0 \Leftrightarrow x(\frac{-a}{3} + a) + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3b}{2a}$

Und aus $x^2 = \frac{9b^2}{4a^2} = -\frac{a}{3}$ erhalten wir $4a^3 + 27b^2 = 0$.

Falls $4a^3 + 27b^2 = 0$, verifiziert man einfach dass $x = -\frac{3b}{2a}$ und $y = 0$ Lösung vom System ist $\Rightarrow$ singulärer Punkt.

Vereinfachte Weierstrass-Form in Char 2

Falls $char(K) = 2$ kann die vereinfachte Version der Kurvengleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ nicht mehr verwendet werden. So eine Gleichung definiert in Charakteristik 2 *immer* eine singuläre Kurve (Übung). Hier muss man auf

$$E: \ y^2 + xy = x^3 + a_2x^2 + a_6 \qquad (*)$$

mit $a_6 \neq 0$ zurück greifen.

Übung: Wenn $char(K) = 2$, dann gibt es eine admissible Variable change von einer allgemeinen Weierstrass Gleichung zur Form (*).

Und in Charakteristik 3? (Übung/Recherche)

Das Gruppengesetz, Hintergrund-Infos

Die Menge der K-rationalen Punkte vereinigt mit dem neutralen Element $\mathcal{O}$ (d.h. dem unendlich fernen Punkt ∞) auf E bildet eine abelsche Gruppe.

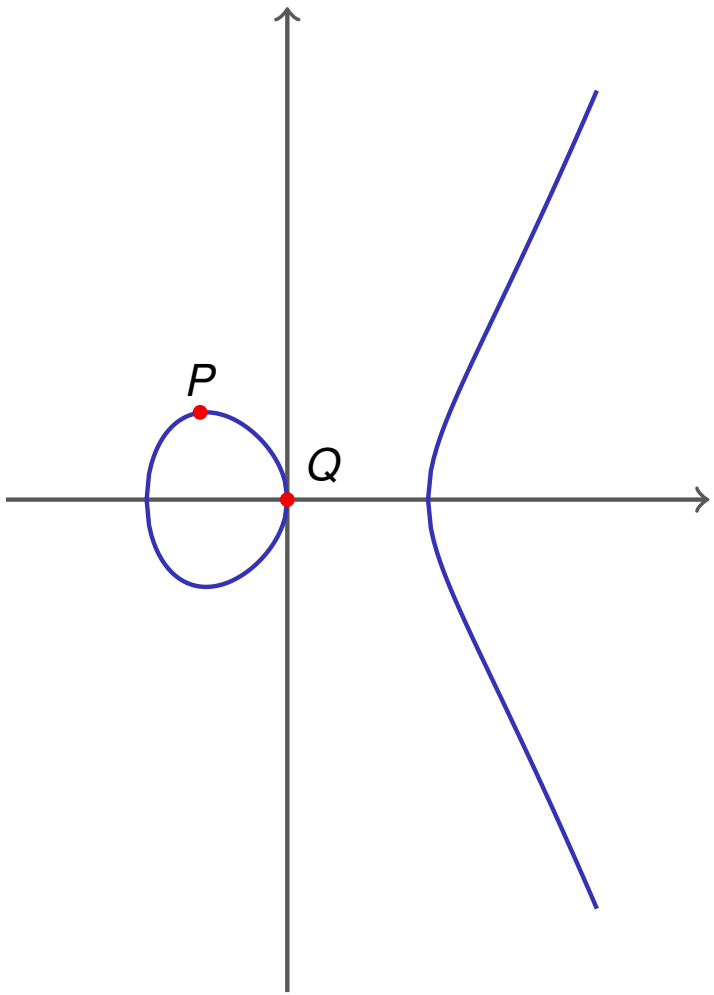
Falls K algebraisch abgeschlossen, trifft eine Gerade die elliptische Kurve immer in drei Punkten (mit Multiplizitäten gezählt).

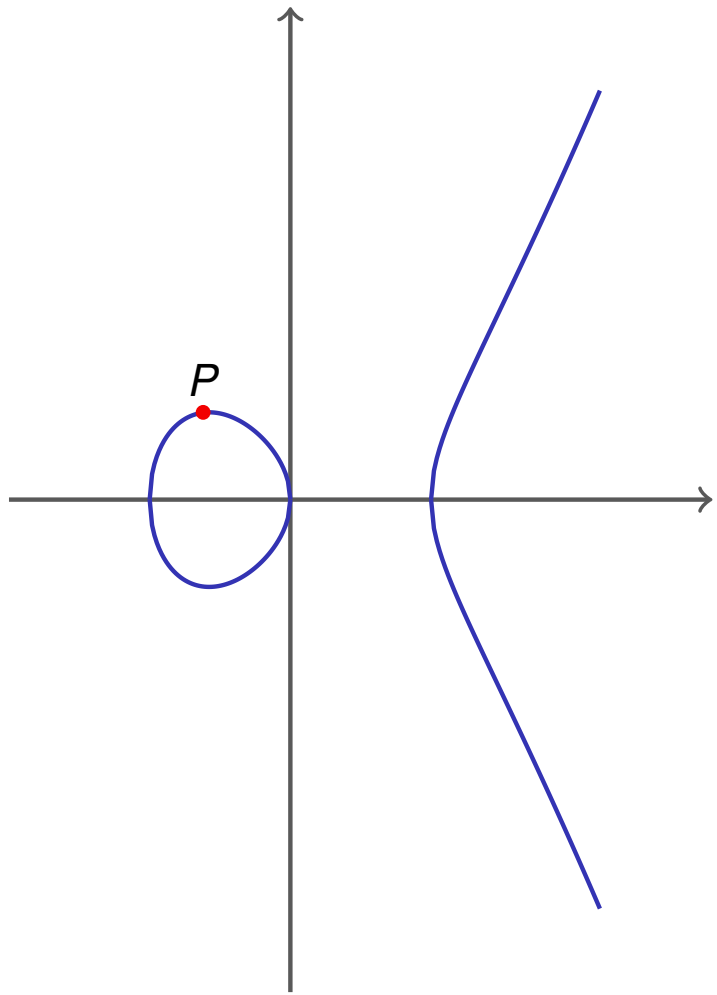
Dies folgt aus einem wichtigen Satz von Bezout: für Kurven in (allgemeinen) Weierstrass Form und nicht vertikale Geraden kann mann dies einfach beweisen (Übung), zusammen mit der nächsten Aussage:

Falls die elliptische Kurve über einem Korper K definiert ist und zwei Schnittpunkte in einer Körpererweiterung L/K liegen, dann liegt auch der dritte Schnittpunkt in L.

Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch I

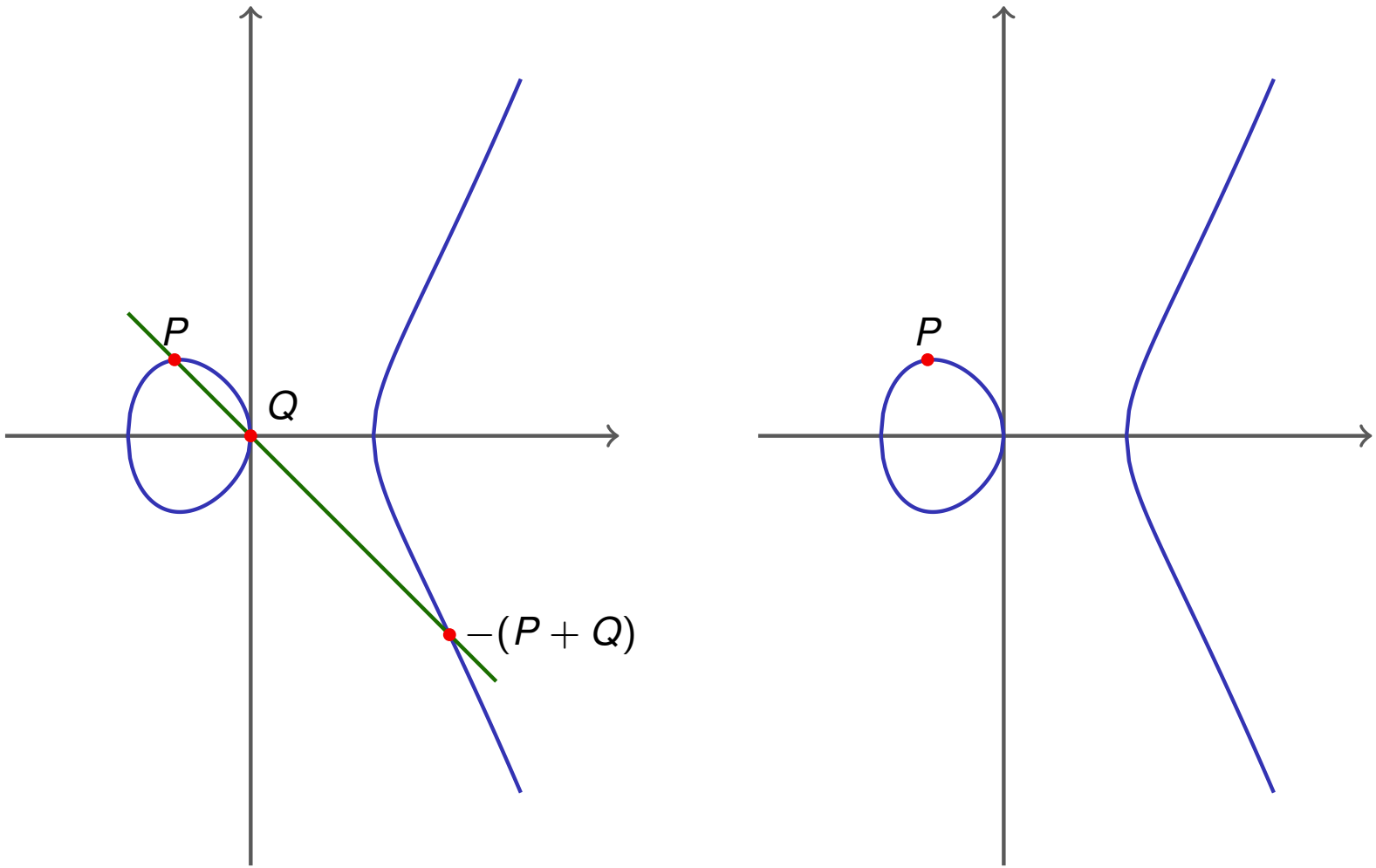
$$y^2 = x^3 - x$$





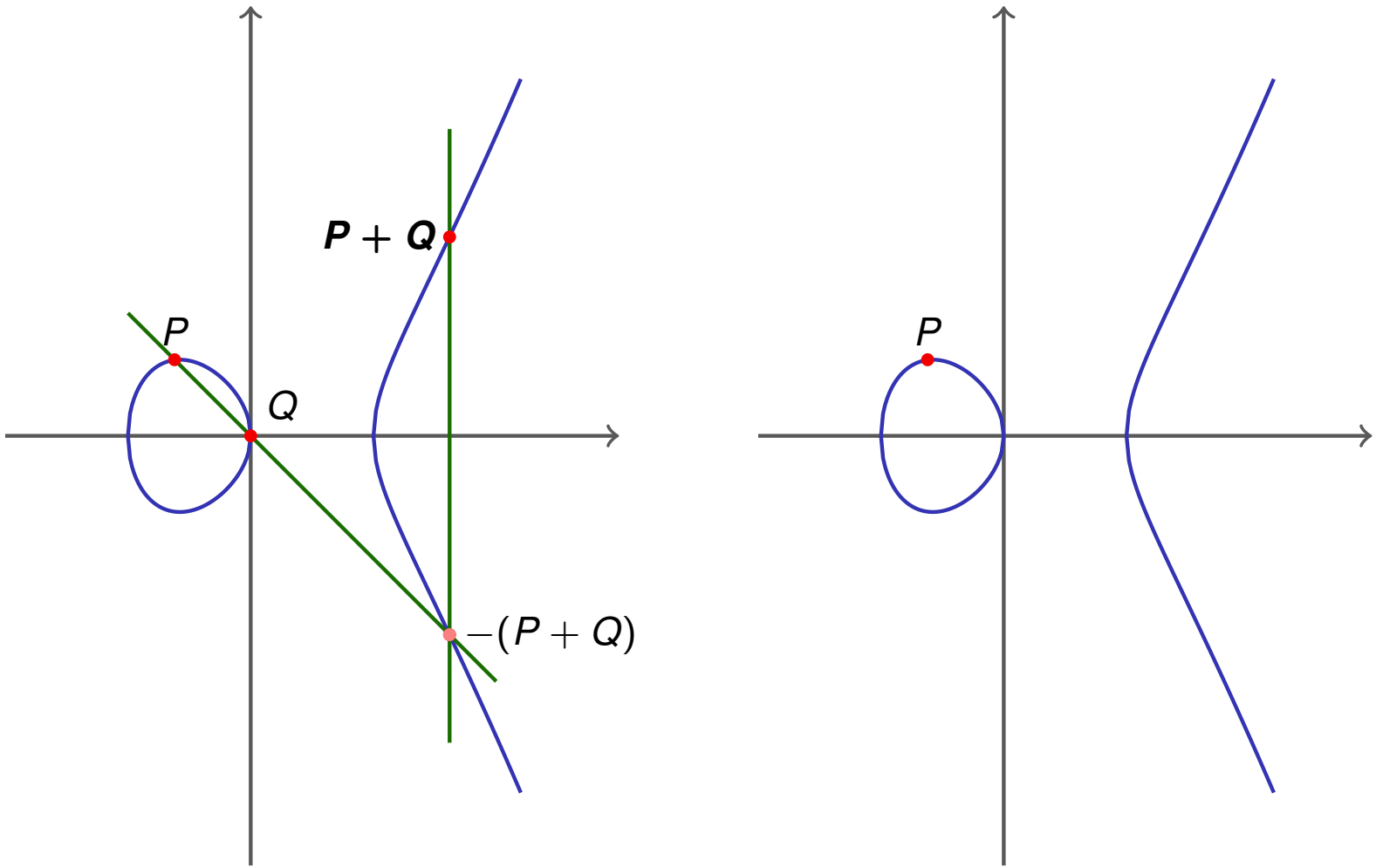
Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch I

$$y^2 = x^3 - x$$



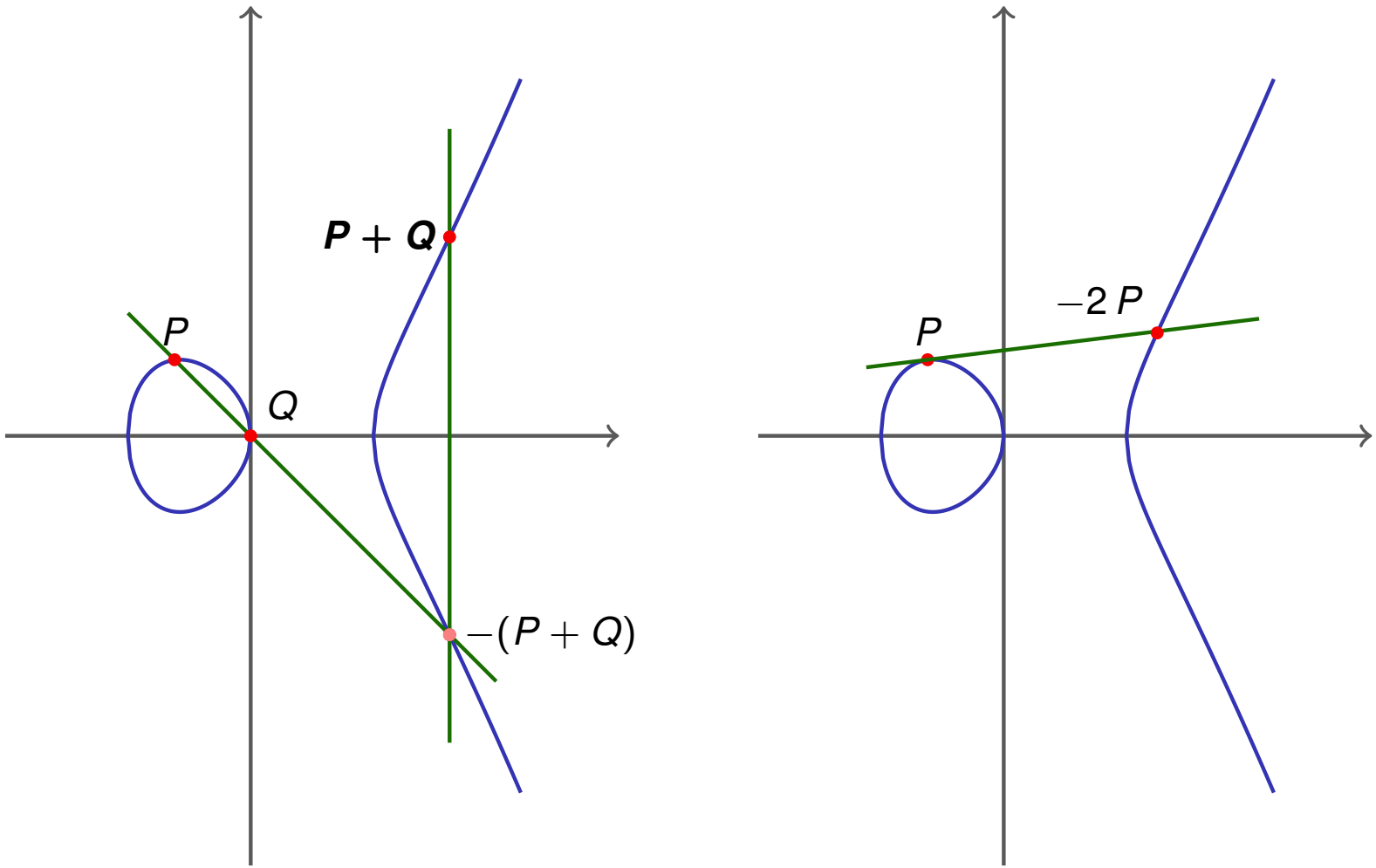
Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch I

$$y^2 = x^3 - x$$



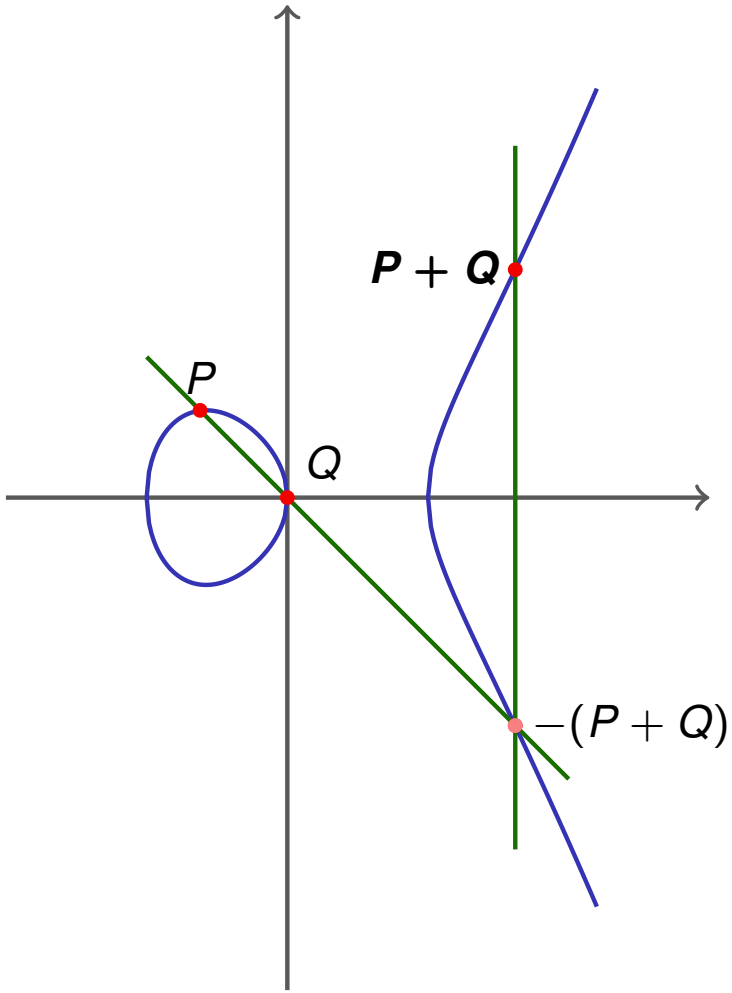
Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch I

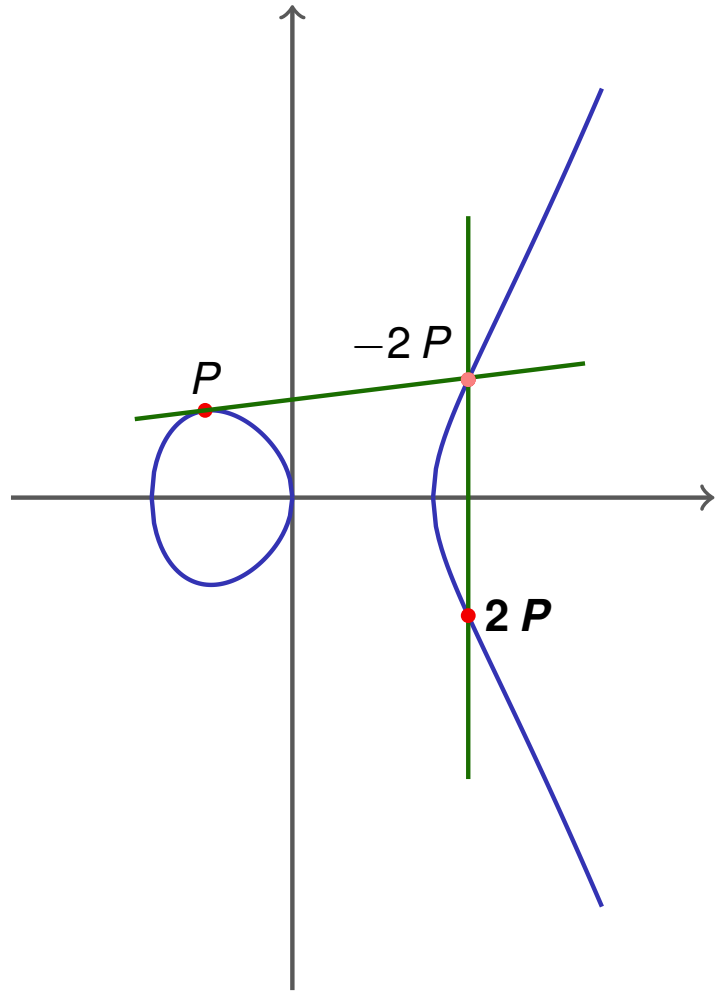
$$y^2 = x^3 - x$$



Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch I

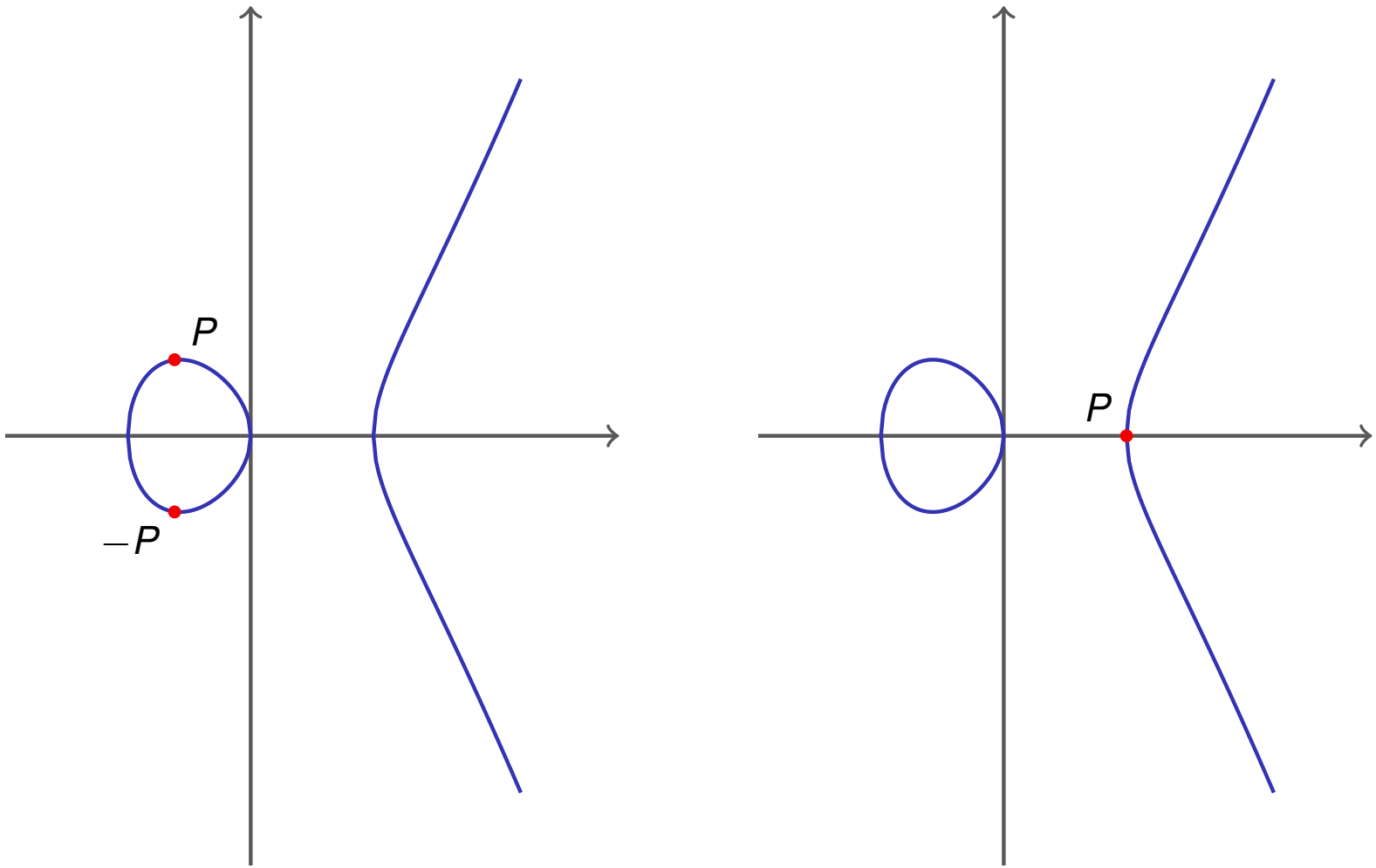
$$y^2 = x^3 - x$$





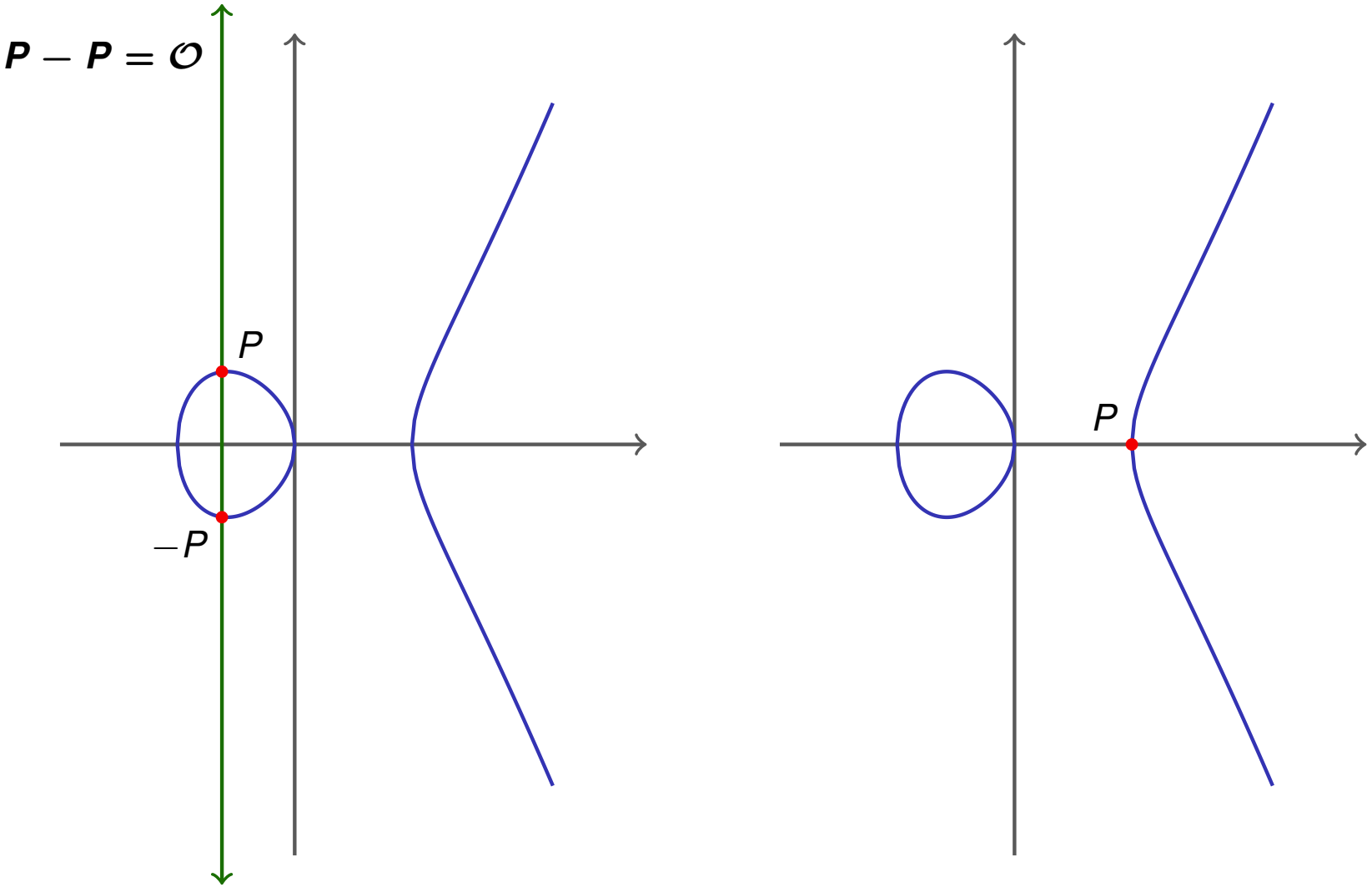
Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch II

$$y^2 = x^3 - x$$



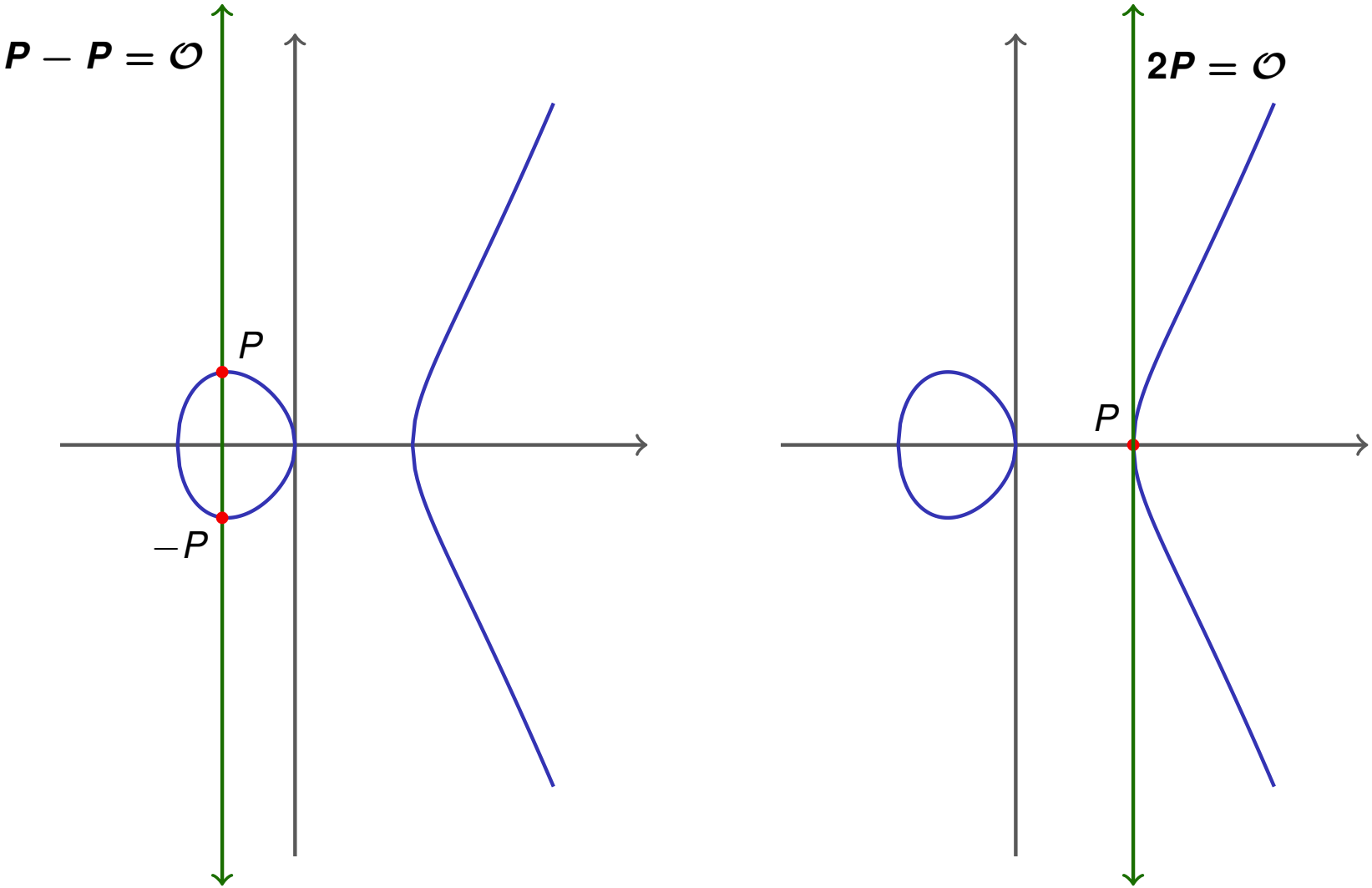
Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch II

$$y^2 = x^3 - x$$



Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch II

$$y^2 = x^3 - x$$



Gruppengesetz auf Elliptische Kurven, geometrisch III

Neutrales Element: Der unendlich ferne Punkt. Notation: $\mathcal{O}$ oder ∞.

Also: $P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$ für alle $P \in E(K)$.

Inverses Element: Der an der x-Achse gespiegelte Punkt. Falls P = Q, dann müssen wir im ersten Schritt die Tangente von P an E wählen.

Die Punkte der Ordnung zwei auf E sind die Punkte, deren y-Koordinate gleich 0 sind (also die Punkte, die auf der x-Achse liegen).

(Die Punkte der Ordnung drei auf E sind die Wendepunkte der Kurve (hier schneidet die Tangente mit Multiplizität drei). Es gibt nur einen solchen Punkt: der unendlich ferne Punkt.)

Arithmetisches Gruppengesetz für $char(K) \neq 2, 3$, I

Seien $P, Q \in E(L)$ Punkte auf der Kurve.

Fall 1 - Addition unterschiedlicher Punkte P, Q mit $P \neq \pm Q$

- Verbinde P, Q durch Gerade g. Steigung von g ist $\lambda = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.
- Der y-Achsenabschnitt $\gamma = y_P - \lambda x_P$.
- Die Gerade lässt sich dann als $g: \ y = \lambda x + \gamma$ angeben.
- Der dritte Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve ist der Punkt $-(P + Q)$. An der x-Achse spiegeln um $P + Q$ zu erhalten.
- Die Koordinaten $(x_3, -y_3)$ des Punktes $-(P + Q)$ erhält man über den Schnittpunkt von g und E:

$$y = \lambda x + \gamma = \lambda(x - x_P) + y_P$$
$$y^2 = (\lambda x + \gamma)^2$$

In Kurvengleichung einsetzen:

$$x^3 - \underline{(\lambda x + \gamma)^2} + ax + b = 0$$

Arithmetisches Gruppengesetz für $char(K) \neq 2, 3$, II

- In Kurvengleichung einsetzen:

$$x^3 - \underline{(\lambda x + \gamma)^2} + ax + b = 0$$

$$\text{d.h.} \quad x^3 - \lambda^2 x^2 + (\cdots)x + (\cdots)x^0 = 0$$

- Diese Gleichung ist nur von x abhängig.
  Ihre Nullstellen sind die x-Koordinaten von P, Q und $P + Q$.
  Sie lässt sich also als

$$(x - x_P)(x - x_Q)(x - x_3) = x^3 - \underline{(x_P + x_Q + x_3)x^2} + \ldots$$

  schreiben. Durch Koeffizientenvergleich erhält man nun:

$$\lambda^2 = x_P + x_Q + x_3$$

- Daraus lässt sich das gesuchte x_3 eindeutig bestimmen.
- $-y_3$ erhält man durch Einsetzen in die Gleichung von g.
- Für den gesuchten Punkt $P + Q = (x_3, y_3)$ gilt also:

$$x_3 = \lambda^2 - x_P - x_Q \quad \text{und} \quad y_3 = \lambda(x_P - x_3) - y_P \ . \qquad \square$$

Arithmetisches Gruppengesetz für $char(K) \neq 2, 3$, III

Fall 2 - Addition des selben Punktes (Verdopplung):
Bilde Tangente g der Kurve in P. Der zweite Schnittpunkt (bzw. dritte, wenn man „P“ doppelt zählt) der Tangente mit der Kurve bildet den Punkt $-2P$. Durch Spiegeln an der x-Achse erhält man $2P$. Im Detail:

- Aus der Kurvengleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ folgt:

$$2\,y\,dy = (3x^2 + a)\,dx$$

und damit gilt für die Steigung (also die Tangente):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + a}{2\,y} \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{3x_P^2 + a}{2\,y_P}$$

- x_3 und y_3 ergeben sich dann aus wie im 1. Fall – man beachte, dass x_P eine zweifache Nullstelle ist.

$$x_3 = \lambda^2 - 2\,x_P \quad \text{und} \quad y_3 = \lambda(x_P - x_3) - y_P \ . \qquad \square$$

Arithmetisches Gruppengesetz für $char(K) \neq 2, 3$, IV

Fall 3 - Addition von P und $-P$:
Gerade senkenrecht: dritter Schnittpunkt im unendlichen.
Summe ist $\mathcal{O}$.

Fall 4 - Addition mit $\mathcal{O}$:
$P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$.

Beobachtungen:

- Wenn $P, Q \in E(K)$ gilt, dann gilt auch: $P + Q \in E(K)$ (Abgeschlossenheit)
- Die Gruppenoperation ist assoziativ (mühsam, aber machbar).

Beispiel, I

$K = GF(13)$ und $E : y^2 = x^3 + 2x + 5$ über K

1) Die Kurve ist elliptisch: $4a^3 + 27b^2 = 4 \cdot 8 + 27 \cdot 5^2 = 32 + 25 = 5$ in $\mathbb{F}_{13}$

2) Bestimme die Punkte auf E:

y	y^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	3
5	12
6	10
7=-6	10
...	...

x	$x^3 + 2x + 5$
0	5
1	8
2	4
3	12
4	12
5	10
6	12
7	11
8	0
9	11
10	11
11	6
12	2

$$\Rightarrow E = \{(2,2),(2,-2),(3,5),(3,-5),(4,5),(4,-5),$$
$$(5,6),(5,-6),(6,5),(6,-5),(8,0),\mathcal{O}\}$$

Beispiel, II

$K = \mathbb{F}_{13} = GF(13)$ und $E : y^2 = x^3 + 2x + 5$ über K (Fortsetzung).

$$E = \{(2,2),(2,-2),(3,5),(3,-5),(4,5),(4,-5),(5,6),(5,-6),$$
$$(6,5),(6,-5),(8,0),0\}$$

3) Bestimme $2P$ für $P = (4,-5) = (4,8)$

$$\lambda = \frac{3x_P^2 + 2}{2y_P} = \frac{11}{3} = 11 \cdot 9 \equiv 8$$

$\Rightarrow x_3 = \lambda - x_P - x_Q = 4$ und $y_3 = \lambda(x_P - x_3) - y_P = 5$, also:

$$2P = (4,5)$$

4) Bestimme $3P$ für $P = (4,-5) = (4,8)$
$3P = 2P + P = (4,5) + (4,-5)$
Da die beiden Punkte die gleiche X-Koordinate haben, liegt $3P$ im unendlichen, also $3P = 0$. Damit ist auch $ord(P) = 3$.

Das Gruppengesetz für $\mathbf{char(K) = 2}$

Im Fall $char(K) = 2$ kann nicht mehr die vereinfachte Version der Kurvengleichung verwendet werden, sondern

$$E: \ y^2 + xy = x^3 + a_2x^2 + a_6$$

mit $a_6 \neq 0$. Veränderungen im Gruppengesetz:

- In Körper mit $char(K) = 2$ gilt $a + b = a - b$, $a + a = 0$.
- Die Inversion eines Punktes kann nicht mehr durch die Spiegelung geschehen. Für den Punkt $P = (x_P, y_P)$ gilt $-P = (x_P, x_P + y_P)$.
- Für die Addition von P, Q mit $P \neq \pm Q$ gilt für die Steigung: $\lambda = \dfrac{y_P + y_Q}{x_P + x_Q}$
- Für die Addition $P + P$ gilt für die Steigung: $\lambda = x_P + \dfrac{y_P}{x_P}$
- x_3 berechnet sich folgendermaßen $x_3 = \lambda^2 + \lambda + \underbrace{x_P + x_Q}_{=0 \text{ falls } P=Q} + a_2$
- y_3 erhält man als $y_3 = \lambda(x_P + x_3) + x_3 + y_P$

Details selber ausarbeiten.

10. Woche: Elliptische Kurven
Skalarmultiplikation und Anwendungen

Skalarmultiplikation

Eine wichtige Fundamentaloperation in vielen kryptographischen Protokollen ist die Skalarmultiplikation, d.h.

Skalarmultiplikation

Gegeben eine Gruppe $G = (G, +, 0)$, ein Element $P \in G$, und eine natürliche Zahl n, die Skalarmultiplikation $n \cdot P$ ist das n-te Vielfache von P, d.h.

$$n \cdot P = \underbrace{P + P + \cdots + P}_{n \text{ Summanden}}$$

Auf elliptischen Kurven können wir solche Operation problemlos durchführen, denn wir kennen alle nötigen Details des Gruppengesetzes.

Die naïve Berechnung von $n \cdot P$ benötigt $n - 1$ Gruppenoperationen, d.h. die Komplexität ist $\Theta(n)$.

Das ist aber zu viel. Wir wollen nun diese Operation optimieren.

Ein spezieller Fall

Sei $n = 2^\ell$. Wir wollen nun $n \cdot P$ berechnen.

Wir können einfach P ℓ-mal verdopplen:

$$P\,,\ \ 2\cdot P\,,\ \ 4\cdot P\,,\ \ \ldots\,,\ \ 2^i\cdot P\,,\ \ 2^{i+1}\cdot P\,,\ \ \ldots\,,\ \ 2^{\ell-1}\cdot P\,,\ \ 2^\ell\cdot P\ .$$

Das ist ℓ Gruppenoperationen, d.h. $\log_2 n$ Schritte.
In Komplexitätstheoretischen Notation: $\Theta(\log_2 n)$.

Problem: das geht nur für Zweierpotenzen.

Verallgemeinerung

Beobachtung: alle natürliche Zahlen lassen sich als Summen von Zweierpotenzen schreiben!
Sei

$$n = \sum_{i \in \Im} 2^i \quad \text{mit} \quad \ell := \max\{i \in \Im\} \ .$$

Dann lässt $n \cdot P$ sich wie folgt berechnen:

1. Berechne
   $P, \ 2 \cdot P, \ 4 \cdot P, \ \ldots, \ 2^i \cdot P, \ 2^{i+1} \cdot P, \ \ldots, \ 2^{\ell-1} \cdot P, \ 2^\ell \cdot P \ .$
2. Für $i \in \Im$ addiere die entsprechenden $2^i \cdot P$ zusammen.

Die Korrektheit der Methode folgt aus

$$n \cdot P = \left(\sum_{i \in \Im} 2^i \right) \cdot P = \sum_{i \in \Im} (2^i \cdot P) \ .$$

Komplexität

Zeit:

1. $\ell = \lfloor \log_2 n \rfloor$ Verdopplungen für Schritt 1.
2. $\#\Im - 1$ Additionen für Schritt 2 (um k Elementen zusammen zu addieren brauche ich nur $k - 1$ Additionen)
3. $\#\Im$ ist das Hamming-Gewicht der Binärdarstellung von n, wobei wir wissen, die höchstwertige Stelle gleich 1 ist. Also $1 \leqslant \#\Im \leqslant \ell + 1$ und da alle Stellen bis auf die höchstwertige beide Werte 0 und 1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen, der erwartete Wert is $1 + \ell/2$

Also: Komplexität $\Theta(\log_2 n)$ und erwartet $\frac{3}{2} \log_2 n$.

Raum: Speicher für $2^i \cdot P$ mit $0 \leqslant i \leqslant \ell$ und für einen „Akkumulator" für die Summe. $\ell + 2$ Registern (gross wie die Gruppenelementen).

Die Zeit-Komplexität lässt sich nur ein wenig verbessern, die Raum-Komplexität aber noch drastisch.

Skalarmultiplikation mit einer Leiter

Idee: Akkumulator X am Anfang auf 0 setzen, $2^i \cdot P$ für $i = 1, 2, \ldots, \ell$ zu berechnen und sofort zu X addieren, falls $i \in \Im$ ist.

Skalarmultiplikation mit einer Leiter

EINGABE: $n = \sum_{i \in \Im} 2^i$ in binärer Darstellung, $\ell := \max\{i \in \Im\}$, Gruppe G und $P \in G$

1. $X \leftarrow 0$, $Q \leftarrow P$
2. For $i = 0, 1, \ldots, \ell$ do
   1. if $i \in \Im$ then $X \leftarrow X + Q$
   2. if $i \neq \ell$ then $Q \leftarrow 2 \cdot Q$

AUSGABE: $X = \sum_{i \in \Im} 2^i \cdot P = n \cdot P$

Zeitaufwand: genau wie auf vorigen Folie.

Speicherplatzbedarf: P, Q und X, also nur drei Register (konstant!). Man beachte, die Registern sind wenigstens $\lceil \log_2 |G| \rceil$ Bits gross.

Andere Schreibweise

Sei die *Ziffernentwicklung* $n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i$ von n gegeben, wobei $d_i \in \{0, 1\}$.

Skalarmultiplikation mit einer Leiter (2. Version)

EINGABE: $n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i$ in binärer Darstellung, Gruppe G und $P \in G$

1. $X \leftarrow 0$, $Q \leftarrow P$
2. For $i = 0, 1, \ldots, \ell$ do
   1. if $d_i = 1$ then $X \leftarrow X + Q$
   2. if $i \neq \ell$ then $Q \leftarrow 2 \cdot Q$

AUSGABE: $X = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i \cdot P = n \cdot P$

Nächst: neuer Algorithmus.

Verdopple-und-Addiere I

Sei $n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i$ wobei $d_i \in \{0, 1\}$.

Verdopple-und-Addiere

EINGABE: $n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i$ in binärer Darstellung, $\ell := \max\{i \in \Im\}$, Gruppe G und $P \in G$

1. $X \leftarrow 0$
2. For $i = \ell, \ell - 1, \ldots, 0$ do
   1. (if $i \neq \ell$ then $X \leftarrow 2 \cdot X$)
   2. if $d_i = 1$ then $X \leftarrow X + P$

AUSGABE: $X = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i \cdot P = n \cdot P$

Vorteile

- ein Register weniger
- öffnet die Möglichkeit, grössere Ziffernmengen zu verwenden.

Woher kommt dieser Algorithmus?

Verdopple-und-Addiere II

Falls

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i \quad \text{dann} \quad n \cdot P = d_i 2^i \cdot P$$

und wir können $n \cdot P$ so berechnen:

$$2\big(2\big(\cdots 2\big(2\big(2(d_\ell \cdot P) + d_{\ell-1} \cdot P\big) + d_{\ell-2} \cdot P\big) + \cdots + d_2 \cdot P\big) + d_1 \cdot P\big) + d_0 \cdot P$$

Verdopple-und-Addiere!
Das ist korrekt auch wenn die d_i andere Werte also $0, 1, -1$ nehmen dürfen (um das zu nutzen, muss man die möglichen Punkte $d_i \cdot P$ im Voraus kennen).

Beweis: nutze die *Linearität* von der Skalarmultiplikation, also folgendes Distributivgesetz: $a \cdot P + b \cdot P = (a + b) \cdot P$.

Man sieht per Induktion (über ℓ), dass obigen Ausdruck $= n \cdot P$ ist.

NAF: Nicht-Angrenzende Form

NAF = non-adjacent form (engl.) = nicht-angrenzende Form (de.)
Ausgangspunkt: auf EK können wir addieren und *subtrahieren*: Falls men eine Entwicklung

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i \quad \text{mit} \quad d_i \in \{0, 1, -1\}$$

hat, dann gibt es folgenden Algorithmus

Verdopple-und-Addiere-oder-Subtrahiere

EINGABE: $n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i$ mit $d_i \in \{0, 1, -1\}$, Gruppe G und $P \in G$

1. $X \leftarrow 0$
2. For $i = \ell, \ell - 1, \ldots, 0$ do
   1. (if $i \neq \ell$ then $X \leftarrow 2 \cdot X$)
   2. if $d_i = 1$ then $X \leftarrow X + P$
   3. if $d_i = -1$ then $X \leftarrow X - P$

AUSGABE: $X = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i \cdot P = n \cdot P$

Frage: doch besser? Wann? Warum?

Berechnung der NAF

Beo: eine ungerade Zahl ist kongruent zu 1 oder -1 modulo 4.

Berechnung der NAF

Eingabe: $n \in \mathbb{Z}$,

1. $z \leftarrow n$
2. $\ell \leftarrow 0$
3. while $z \neq 0$ do
   1. if z even then
      1. $d_\ell \leftarrow 0$
   2. else
      1. Sei $d_\ell \in D$ mit $d_\ell \equiv z \ mod(4)$
   3. $z = \frac{z-d_\ell}{2}$
   4. if $z \neq 0$ then $\ell = \ell + 1$
4. Ausgabe: $(\sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i)$ mit $d_i \in \{0, 1, -1\}$ und $d_i = 0 \vee d_{i+1} = 0$

Korrektheit (falls Terminiert)

Es ist $n = (d_\ell\, d_{\ell-1} \ldots d_1\, d_0)_2 = (\underbrace{d_\ell \ldots d_1}_{\frac{n-d_0}{2}}\ \underbrace{d_0}_{=0})_2$

Also: wenn man weiss, wie man mindestwertige Ziffer von einer Eingabe bestimmt, kann man *rekursiv* die ganze Entwicklung bestimmen.

- Falls n gerade, dann reduzieren wir modulo 2 die Gleichheit $\sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i = n$: es ist $d_0 \equiv 0 \bmod 2$, also $d_0 = 0$.
- Falls n ungerade, dann $d_0 \equiv 1 \equiv -1 \bmod 2$: ist d_0 nicht eindeutig?
- Reduziert man modulo 4, so erhält man $n \equiv d_0 + 2\,d_1 \equiv$ **entweder** 1 **oder** $-1 \bmod 4$ ist.
- Falls $n \equiv 1 \bmod 4$, dann setzen wir $d_0 = 1$.
  Also ist $n - 1 \equiv 0 \bmod d$, und $(n-1)/2 \equiv 0 \bmod 2$.
  Nun ist d_1 die mindestwertige Ziffer von $(n-1)/2$ und es muss $d_1 = 0$.
- Analog, falls $n \equiv -1 \bmod 4$, dann $d_0 = -1$ und $d_1 = 0$.

Ein rekursiver Algorithmus „klebt" einfach d_0 (bestimmt wie oben) und die Entwicklung von $\frac{n-d_0}{2}$ zusammen; ferner, da $d_0 \neq 0 \Rightarrow d_1 = 0$, ist auch $d_i \neq 0 \Rightarrow d_{i+1} = 0$, also ist seine Ausgabe Korrekt.
Der Algorithmus auf vorigen Folie ist eine iterative Version davon. □

Terminierung

OBdA $n > 0$. Für $n = 1$ Algorithmus terminiert sofort korrekt.

Falls $n > 1$, dann

$$\frac{n - d_0}{2} < n \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{d_0}{2} < \frac{n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -d_0 < n$$

und das ist immer erfüllt.

Also wird n durch strikt kleinere Zahlen ersetzt: ergibt Folge absteigender Zahlen.

Diese Folge absteigender Zahlen muss halten.

Analyse I

Wie groß ist der Vorteil durch die NAF?.
Länge: Die Zahl z hat genau dann $\ell + 1$ Stellen, wenn $d_\ell = 1$ und $\forall t > l: \ d_t = 0$ gilt. Die Entwicklung hat *Länge* $\boldsymbol{\ell + 1}$ hat.

Das (Hamming)Gewicht von $n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i$ ist $\boldsymbol{w(n) = \#\{d_i | d_i \neq 0\}}$

Die „Dichte“ einer Entwicklung ist gegeben als: $\boldsymbol{d(n) = \frac{w(n)}{\ell + 1}}$

Satz: Dichte der Binärdarstellung und der NAF

Der Erwartungswert der Dichte der binären Darstellung einer zufällig gewählten natürlichen Zahl n ist $\mathbb{E}(d(bin(n))) = \frac{1}{2}$.
Der Erwartungswert der Dichte der NAF einer zufällig gewählten natürlichen Zahl n ist $\mathbb{E}(d(NAF(n))) = \frac{1}{3}$.

Also: Komplexität reduziert von $\frac{3}{2}\ell$ (erwartet) Gruppenoperationen auf $\frac{4}{3}\ell$ (erwartet). 11.1% weniger Gruppenoperationen.
Wenn nur Additionen gezählt: von $\frac{1}{2}\ell$ auf $\frac{1}{3}\ell$, also 33.3% weniger.

Analyse II

Binärdarstellung: Jede Ziffer der Binärenentwicklung einer zufällig gewählten ganzen Zahl ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit 0 oder 1.

NAF: Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ist eine Zahl gerade also ist ihre niederwertigste Ziffer $d_0 = 0$, und $\frac{n}{2}$ verhält sich wieder wie eine zufällig gewählte ganze Zahl (mutige Annahme).

Ist n hingegen ungerade, so ist die niederwertigste Ziffer $d_0 \in \{1, \bar{1}\}$ und $d_1 = 0$ und $\frac{n-(d_0+2d_1)}{4}$ verhält sich wie eine zufällig gewählte ganze Zahl.

Modellieren wir obigen Prozess:
Man konstruiere eine zufällige NAF, in dem man aus einer Urne mit zwei Kärtchen, die mit 0 und $0\star$ beschriftet sind, t-Mal ein Kärtchen mit zurücklegen zieht. $\star$ steht für „ungleich Null“.

Bei $\frac{t}{2}$ (erwartet) Ziehungen wird 0 gezogen, bei den restlichen $\frac{t}{2}$ (erwartet) $0\star$.

Somit ergibt sich eine erwartete Länge von $1 \cdot \frac{t}{2} + 2 \cdot \frac{t}{2} = \frac{3t}{2}$ und ein erwartetes Gewicht von $\frac{t}{2}$.

Daher ist die erwartete Dichte der NAF $\mathbb{E}(d(NAF(n))) = \frac{t/2}{3t/2} = \frac{1}{3}$. □

Effizientere Rekodierung

Sei $w \in \mathbb{N}$, $w \geqslant 1$, ein Parameter.
Die w-NAF ist definiert als eine Ziffernentwicklung (zur Basis 2) $n = \sum_{j=0}^{\ell} d_j 2^j$ mit folgenden Eigenschaften:

(w-NAF-1) Entweder $d_j = 0$ oder d_j ist ungerade.

(w-NAF-2) Falls $d_j \neq 0$, dann $d_{j+1} = \cdots = d_{j+w-1} = 0$.

Um eine solche Darstellung zu erhalten wird normalerweise eine der folgenden Ziffernmengen verwendet:

1. $D \subseteq \mathbb{N}_0$ also: $D = \{0\} \cup \{1, 3, 5, \ldots, 2^w - 1\}$
2. $D = -D$ also: $D = \{0\} \cup \pm\{1, 3, 5, \ldots, 2^{w-1} - 1\}$

Die erste Ziffernmenge ist erforderlich, falls die Inversion von Gruppenelementen nicht effizient ist (allgemeine Gruppen).

Die zweite Ziffernmenge wird bei elliptischen Kurven verwendet, weil man somit Platz und Laufzeit sparen kann (später).

Allgemeiner: D besteht aus 0 und Vertreter aller Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo 2^w, die ungerade sind.

Die w-NAF

Recodierung der w-NAF

Eingabe: $n = \sum d_i 2^i \in \mathbb{N}$ mit $d_i \in D$ und
$d_i = 0 \vee d_i \neq 0 \Rightarrow d_i = d_{i+1} = \ldots = d_{i+w-1} = 0$

1. $z \leftarrow n$
2. $\ell \leftarrow 0$
3. while $z \neq 0$ do
   1. if z gerade then $d_\ell \leftarrow 0$
   2. else
      1. Sei $d_\ell \in D$ mit $d_\ell \equiv z \ mod(2^w)$
   3. $z = \frac{z - d_\ell}{2}$
   4. if $z \neq 0$ then $\ell = \ell + 1$

Ausgabe: „$(\sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i)$”

Verwendung der w-NAF

Verdopple-und-Addiere-oder-Subtrahiere mit w-NAF

EINGABE: $n = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i$ mit $d_i \in D$. Gruppe G und $P \in G$

1. $X \leftarrow 0$
2. für alle $d \in D \cap \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, berechne und spreichere $d \cdot P$
3. For $i = \ell, \ell - 1, \ldots, 0$ do
   1. (if $i \neq \ell$ then $X \leftarrow 2 \cdot X$)
   2. if $d_i \neq 0$ then $X \leftarrow X + \mathit{Vorzeichen}(d_i)|d_i| \cdot P$

AUSGABE: $X = \sum_{i=0}^{\ell} d_i 2^i \cdot P = n \cdot P$

Übungen: (i) Korrektheit der w-NAF Entwicklung (also: Korrektheit des Ergebnisses und Terminierung des Algorithmus); (ii) zeigen, dass die erwartete Dichte $\frac{1}{w+1}$ ist; (iii) was ist der Vorteil der 2. Ziffernmenge bei elliptischen Kurve ?

Ist das gut?

Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall $D \subseteq \mathbb{N}_0$ also: $D = \{0\} \cup \{1, 3, 5, \ldots, 2^w - 1\}$. In diesem Fall, mit positiven Skalaren, gibt es nur Additionen. Um alle $d \cdot P$ mit $d = 3, 5, \ldots, 2^{w-1}$ brauchen wir 2^{w-1} Operationen (man rechnet zuerst $2 \cdot P$ und dann fährt man weiter in Zweierschritten fort).

Man braucht w, derart dass

$$\ell + 2^{w-1} + \frac{1}{w+1}\ell$$

minimiert wird. Für w gilt $w_{\min} \approx \log_2(\ell) - 2\log_2(\log_2(\ell))$ (cfr. Knuth, ACP 2).

Erdös hatte bewiesen: *Für fast alle ganze Zahlen n, die minimale Anzahl von Operationen, die nötig ist, um $n \cdot P$ zu rechnen, ist* $\lambda(n) + \lambda(n)/\lambda(\lambda(n))$ *wobei* $\lambda(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

Mit der w-NAF, obiger Ziffernmenge und $w = w_{\min}$, erreicht man den fast optimalen Wert $\lambda(n) + (1 + o(1))\lambda(n)/\lambda(\lambda(n))$.

Sei $\ell = 256$. Anzahl Ops mit Binärdarstellung: $256 + \frac{1}{2}256 = 384$; Mit NAF=2-NAF: $256 + \frac{1}{2}256 = 341.333$; Mit w-NAF: für $w = 3, 4, 5, 6$ ist diese Anzahl 324, 315.2, 314.7, 324.7. **Min mit 5-NAF!**

Kryptographische Anwendungen von Elliptischen Kurven.

Diffie-Hellman Schlüsselaustausch (1976)

Öffentliche Parameter: Zyklische Gruppe G (z.B. $\leqslant E(\mathbb{F}_q)$) der Ordnung ℓ (Primzahl), mit Generator P.

Protokoll Diffie-Hellman Schlüsselaustausch

EINGABE: G, P

1. Alice wählt $\alpha \in [1..\ell - 1]$ zufällig und schickt $\alpha \cdot P$ an Bob.
2. Bob wählt $\beta \in [1..\ell - 1]$ zufällig und schickt $\beta \cdot P$ an Alice.
3. Alice berechnet $\alpha \cdot (\beta \cdot P)$, Bob analog berechnet $\beta \cdot (\alpha \cdot P)$.

Gemeinsamer geheimer DH-Schlüssel: $(\alpha\beta) \cdot P$.

- Angreifer Eve erhält P, $\alpha \cdot P$, $\beta \cdot P$.
- **Sicherheit:** Eve kann $(\alpha\beta) \cdot P$ nicht
  - berechnen; (Diffie-Hellman-Problem DH-Problem);
  - von einem $\gamma \cdot P$ mit zufälligem γ unterscheiden (Decisional Diffie-Hellman-Problem, DDH-Problem).

Das DH-Problem und Diskrete Logarithmen

Weiteres Problem: Discrete-Log Problem: Gegeben P und $Q \in \langle P \rangle$, finde t, derart dass $Q = t \cdot P$.

Wer das DL-Problem lösen kann, kann das DH-Problem lösen (trivial). Die Probleme sind für elliptische Kurven unter bestimmten Annahmen äquivalent.

- U.M. Maurer and S. Wolf: Diffie-Hellmann oracles: in Advances in cryptology - CRYPTO '96, Lect. Notes in Computer Science Vol. 1109(1996) pp. 268–282, Springer-Verlag.
- A. Muzereau, N.P. Smart, F. Vercauteren: The equivalence between the DHP and DLP for elliptic curves used in practical applications, LMS J. Comput. Math., 7(2004), 50–72.

Diskrete Logarithmen

Shoup-Nechaev, in black-box Gruppen primer Ordnung ℓ hat ein Algorithmus, dass das DLP mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$ löst, Komplexität $\Theta(\sqrt{\ell})$

Für vorsichtig gewahlte Kurven hat aber der beste bekannte Algorithmus zum lösen des DLPs Komplexität $O(\sqrt{\ell})$, wobei ℓ der größte Primfaktor der Gruppenordnung ist (Algorithmus von Silver-Pohling-Hellman - im Grunde genommen, eine Anwendung des chinesischen Restsatzes).

Infolgedessen wollen wir Kurven und Körper mit $\#E(\mathbb{F}_q)$ „quasi" eine Primzahl.

ECDSA I - Parameter

Variante des Signaturalgorithmus DSA mit ellitischen Kurven.
IEEE-Standard.

ECDSA:

Parameter (öffentlich): Kurve $E(\mathbb{F}_p)$, Punkt $P \in E(\mathbb{F}_p)$ der Ordnung ℓ (ℓ ist eine grosse Primzahl).

Privater Schlüssel: eine ganze Zahl α im Intervall $[2 \ldots \ell - 2]$

Öffentlicher Schlüssel: der Punkt Q mit $\alpha \cdot P = Q$.

$H(\cdot)$ ist eine vorhandene, feste Hashfunktion.

ECDSA II - Signaturerzeugung

Signaturerzeugung:
EINGABE: eine Nachricht m, Alices privater und öffentlicher Schlüssel α und Q.
AUSGABE: Alices elektronische Signatur (r, s)

1. A(lice) wählt $k \in [2 \ldots \ell - 2]$ zufällig.
2. A berechnet $k \cdot P = (x_1, y_1)$ und $r = x_1 \bmod \ell$. Falls $r = 0$ dann geht sie zu Schritt 1 zurück, da sonst die Signatur s, die in Schritt 3 berechnet wird, nicht vom privaten Schlüssel α abhängig wäre.
3. A berechnet $k^{-1} \bmod \ell$ und den Hashwert $H(m)$ der Nachricht m. Dann bildet sie $s = k^{-1}(H(m) + xr) \bmod \ell$.
4. Falls $s = 0$, beginnt sie wieder bei Schritt 1. Sonst sendet A die Nachricht m zusammen mit der Signatur (r, s) an B(ob).

ECDSA III - Signaturverifikation

Signaturverifikation:
EINGABE : Die Nachricht m, eine Signatur (r, s), Alices öffentlicher Schlüssel Q
AUSGABE : Die Signatur ist „korrekt“ oder „falsch“

1. B prüft, ob $r, s \in [1 \ldots \ell - 1]$.
2. B berechnet $w = s^{-1} \bmod \ell$ und $H(m)$. Dann bildet er $u_1 = H(m)w \bmod \ell$ und $u_2 = rw \bmod \ell$.
3. B ermittelt $u_1 \cdot P + u_2 \cdot Q = (x_0, y_0)$.
4. Bob entscheidet sich für „korrekt“(also akzeptiert die Signatur als gültig) genau dann, wenn $x_0 \bmod \ell = r$ ist, sonst für „falsch“.

ECDSA IV - Korrektheit und Sicherheit

Zur Korrektheit: Wir nehmen an, dass Alice die Signaturerzeugung korrekt ausgeführt hat. Dann berechnet Bob im dritten Schritt der Signaturverifikation

$$u_1 \cdot P + u_2 \cdot Q = (H(m)w \bmod \ell) \cdot P + (rw \bmod \ell) \cdot Q = (x_0, y_0) \ .$$

Nun gilt aber $\alpha \cdot P = Q$. Also erhält Bob

$$\begin{aligned}(H(m)w \bmod \ell) \cdot P + (rw \bmod \ell)\alpha \cdot P & \\ = ((H(m)w + rw\alpha) \bmod \ell) \cdot P & \\ = (w(H(m) + r\alpha) \bmod \ell) \cdot P = k \cdot P \ . &\end{aligned}$$

Deshalb muss $x_0 = r \bmod \ell$ gelten.

Zur Sicherheit: Falls ein beliebiger Benutzer C den diskreten Logarithmus berechnen kann, erhält er aus P und Q den geheimen Schlussel α und kann damit Signaturen von A fälschen.

11. Woche: Turingmaschinen und Komplexität
Rekursive Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit
Laufzeit, Klassen DTIME und $\mathcal{P}$

Einführung in die NP-Vollständigkeitstheorie

Notationen

- Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ aus Buchstaben a_i
- Worte der Länge n sind Elemente aus $A^n = \{a_{i_1} \ldots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A\}$.
- $A^0 = \epsilon$, ϵ ist das leere Wort.
- $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$, $A^+ = A^* \setminus \epsilon$, $A^{\leq m} = \bigcup_{n=0}^{m} A^n$
- Länge $|a_1 \ldots a_n| = n$. $\mathrm{bin}(a_1)$ ist Binärcodierung von a_1.

Definition Sprache L

Sei A ein Alphabet. Eine Menge $L \subseteq A^*$ heißt *Sprache* über dem Alphabet A. Das *Komplement* von L über A ist definiert als $\bar{L} = A^* \setminus L$.

Turingmaschine (informal)

Turingmaschine besteht aus:

- Einseitig unendlichem Band mit Zellen (Speicher),
- Kontrolle und einem Lesekopf, der auf einer Zelle steht.

Arbeitsweise einer Turingmaschine

- Bandsymbol $\triangleright$ steht in der Zelle am linken Bandende.
- Kontrolle besitzt Zustände einer endlichen Zustandsmenge.
- $\sqcup$ bedeutet „Bandzelle noch nicht beschrieben“.
- Abhängig vom Zelleninhalt und Zustand schreibt die Kontrolle ein Zeichen und bewegt den Lesekopf nach links oder rechts.
- Zu Beginn der Berechnung gilt:
  - Lesekopf befindet sich auf dem linken Bandende $\triangleright$.
  - Band enthält $\triangleright a_1 \ldots a_n \sqcup \sqcup \ldots$, wobei $a_1 \ldots a_n$ die Eingabe ist.
- Turingmaschine M hält nur, falls Kontrolle in Zuständen q_a oder q_r.
  - Falls M in q_a hält: M akzeptiert (accepts) die Eingabe $a_1 \ldots a_n$.
  - Falls M in q_r hält: M verwirft (rejects) die Eingabe $a_1 \ldots a_n$.
  - Falls M nie in die Zustände q_a, q_r kommt: M läuft unendlich.

Turingmaschine (formal)

Definition Deterministische Turingmaschine (Turing 1936)

Eine deterministische Turingmaschine DTM ist ein 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \sqcup, E)$ bestehend aus

1. Zustandmenge Q: Enthält Zustände q_a, q_r, s.
2. Bandalphabet Γ mit $\sqcup, \triangleright \in \Gamma$
3. Eingabealphabet $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\sqcup, \triangleright\}$.
4. Bewegungen: E ist entweder $\{R, L\}$ oder $\{R, N, L\}$ wobei L = Links, R = Rechts, N = Keine Bewegung.
5. Übergangsfunktion $\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times E$
   - Es gilt stets am linken Bandende $\delta(q, \triangleright) = (q', \triangleright, R)$.
   - Es gilt nie $\delta(q, a) = (q', \triangleright, L/R)$ (nicht am linken Bandende).

Man kann zeigen, dass die Definitionen mit $E = \{R, L\}$ und $E = \{R, N, L\}$ äquivalent sind (polynomielle Äquivalenz: siehe später).

Beispiel DTM M_1

Bsp: $a^n, n \geqslant 1$

- $Q = \{q_0, q_1, q_a, q_r\}$ mit $s = q_0$
- $\Sigma = \{a\}$ und $\Gamma = \{\sqcup, \triangleright, a\}$
- Übergangsfunktion

δ	a	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	(q_1, a, R)	$(q_r, \sqcup, R)$	$(q_0, \triangleright, R)$
q_1	(q_1, a, R)	$(q_a, \sqcup, R)$	$(q_1, \triangleright, R)$

Notation der Konfigurationen bei Eingabe a^2:

$$
\begin{aligned}
& q_0 \triangleright aa \\
\vdash\ & \triangleright q_0 aa \\
\vdash\ & \triangleright a q_1 a \\
\vdash\ & \triangleright aa q_1 \sqcup \\
\vdash\ & \triangleright aa \sqcup q_a \sqcup
\end{aligned}
$$

Nachfolgekonfigurationen

Notation Nachfolgekonfiguration

- Direkte Nachfolgekonfiguration: $aqb \vdash a'q'b'$
- i-te Nachfolgekofiguration: $aqb \vdash^i a'q'b'$
- Indirekte Nachfolgekonfiguration $aqb \vdash^* a'b'q'$, d.h. $\exists i \in \mathbb{N} : aqb \vdash^i a'q'b'$.

Akzeptanz und Ablehnen von Eingaben

- DTM M erhalte Eingabe $w \in \Sigma^*$.
  - M akzeptiert $w \Leftrightarrow \exists a, b \in \Gamma^* \text{ mit } s \rhd w \vdash^* aq_a b$
  - M lehnt w ab $\Leftrightarrow \exists a, b \in \Gamma^* \text{ mit } s \rhd w \vdash^* aq_r b$

Akzeptierte Sprache, L rekursiv aufzählbar

Definition Akzeptierte Sprache, Rekursive Aufzählbarkeit

Sei M eine DTM. Dann bezeichne

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert Eingabe } w\}$$

die von M *akzeptierte Sprache*.
Eine Sprache L heißt *rekursiv aufzählbar* gdw eine DTM M existiert mit $L = L(M)$.

- Unsere Beispiel-DTM M_1 akzeptiert die Sprache $L(M_1) = \{a\}^+$.
- D.h. $L = \{a\}^+$ ist rekursiv aufzählbar, da für M_1 gilt $L = L(M_1)$.
- Aus der obigen Definition folgt:
  L ist nicht rekursiv aufzählbar $\Leftrightarrow \nexists$ DTM M mit $L = L(M)$.
- Es gibt Sprachen, die nicht rekursiv aufzählbar sind, z.B.
  $\bar{H} = \{\langle M, x\rangle \mid \text{DTM } M \text{ hält bei Eingabe } x \text{ nicht.}\}$. (ohne Beweis)

Entscheidbarkeit und rekursive Sprachen

Definition Entscheidbarkeit

Sei M eine DTM, die die Sprache $L(M)$ akzeptiert. Wir sagen, dass M die Sprache $L(M)$ *entscheidet* gdw M alle Eingaben $w \in \bar{L}$ ablehnt.
D.h. insbesondere M hält auf allen Eingaben.
Eine Sprache L heißt *entscheidbar* gdw eine DTM M existiert, die L entscheidet.

- Unsere Beispiel-DTM M_1 entscheidet die Sprache $L(M_1) = \{a\}^+$.
- $L = \{a\}^+$ ist entscheidbar, da M_1 die Sprache L entscheidet.

Korollar Entscheidbarkeit impliziert rekursive Aufzählbarkeit

Sei L eine entscheidbare Sprache. Dann ist L rekursiv aufzählbar.

- Die Rückrichtung stimmt nicht:
  Es gibt rekursiv aufzählbare L, die nicht entscheidbar sind, z.B.
  $H = \{\langle M, x\rangle \mid \text{DTM } M \text{ hält auf Eingabe } x.\}$. (ohne Beweis)

Entscheiden versus Berechnen

Definition Berechnung von Funktionen

Eine DTM M berechnet die Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, falls M für jedes $(a_1, \ldots, a_n)$ bei Eingabe $\mathrm{bin}(a_1)\# \ldots \#\mathrm{bin}(a_n)$ den Bandinhalt $\mathrm{bin}(f(a_1, \ldots, a_n))$ berechnet und in q_a hält.

- Werden der Einfachheit halber Sprachen entscheiden, nicht Funktionen berechnen.

Laufzeit einer DTM, Klasse DTIME

Definition Laufzeit einer DTM

Sei M eine DTM mit Eingabealphabet Σ, die bei jeder Eingabe hält. Sei $T_M(w)$ die Anzahl der Rechenschritte – d.h. Bewegungen des Lesekopfes von M – bei Eingabe w. Dann bezeichnen wir die Funktion

$$T_M(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } T_M(n) = \max\{T_M(w) \mid w \in \Sigma^{\leq n}\}$$

als *Zeitkomplexität* bzw. *Laufzeit* der DTM M.

- Die Laufzeit wächst monoton in n.
- Unsere Beispiel-DTM M_1 mit $L(M_1) = \{a\}^*$ besitzt Laufzeit $\mathcal{O}(n)$.

Definition DTIME

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Die Klasse DTIME ist definiert als

$$\mathrm{DTIME}(t(n)) := \{L \mid L \text{ wird von DTM mit Laufzeit } \mathcal{O}(t(n)) \text{ entschieden.}\}.$$

- Es gilt $L(M_1) \in DTIME(n)$.

Registermaschine RAM

Registermaschine RAM besteht aus den folgenden Komponenten:

- Eingabe-/ und Ausgabe-Register
- Speicherregister
- Programm
- Befehlszähler
- Akkumulator

Funktionsweise einer RAM:

- Liest Eingabe aus Eingaberegister und lässt Programm auf Eingabe laufen.
- Führt Arithmetik im Akkumulator aus.
- Ergebnisse können im Speicherregister gespeichert werden.
- Befehlszähler realisiert Sprünge, Schleifen und bedingte Anweisungen im Programm.
- Ausgabe erfolgt im Ausgaberegister.

DTMs versus RAMs, Churchsche These

Fakt Polynomielle Äquivalenz von DTMs und RAMs

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion mit $t(n) \geqslant n$. Jede RAM mit Laufzeit $t(n)$ kann durch eine DTM M mit Laufzeit $\mathcal{O}(t(n)^3)$ simuliert werden.

Churchsche These (1936)

„Die im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen sind genau die durch Turingmaschinen berechenbaren Funkionen.“

- These ist nicht beweisbar oder widerlegbar.
- Alle bekannten Berechenbarkeitsbegriffe führen zu DTM-berechenbaren Funktionen.

Die Klasse $\mathcal{P}$

Definition Klasse $\mathcal{P}$

Die Klasse $\mathcal{P}$ ist definiert als

$$\mathcal{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME(n^k).$$

- $L \in \mathcal{P}$ gdw eine DTM existiert, die L in Laufzeit $\mathcal{O}(n^k)$ entscheidet.
- $\mathcal{P}$ ist die Klasse aller in Polynomialzeit entscheidbaren Sprachen. (auf DTMs, RAMs, etc.)
- Hintereinanderausführung/Verzahnung von DTMs mit polynomieller Laufzeit liefert polynomielle Gesamtlaufzeit.
- $\mathcal{P}$ beinhaltet praktische und theoretisch interessante Probleme.
- Probleme ausserhalb von $\mathcal{P}$ sind in der Praxis oft nur für kleine Instanzen oder approximativ lösbar.

Codierung der Eingabe

- Erinnerung: Zeitkomplexität $T_M(n)$ ist eine Funktion in $|w| = n$.
- Benötigen geeignete Codierung der Eingabe w.
- Codierung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$
  - Verwenden Binärkoderung $\mathrm{bin(n)}$ mit Eingabelänge $\Theta(\log n)$.
- Codierung eines Graphen $G = (V, E)$
  - Codieren Knotenanzahl n unär, d.h. $|V| = n$.
  - m Kanten mit Adjazenzliste $|E| = m$ oder Adjazenzmatrix $|E| = n^2$.

Bsp:

- $\textsc{Pfad} := \{(G, s, t) \mid G \text{ ist Graph mit Pfad von } s \text{ nach } t.\} \in \mathcal{P}$.
  - Starte Breitensuche in s.
  - Falls t erreicht wird, akzeptiere. Sonst lehne ab.
  - Laufzeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, d.h. linear in der Eingabelänge von G.
- $\textsc{TeilerFremd} := \{(x, y) \mid \gcd(x, y) = 1\} \in \mathcal{P}$.
  - Berechne mittels Euklidischem Algorithmus $d = \gcd(x, y)$.
  - Falls $d = 1$, akzeptiere. Sonst lehne ab.
  - $\mathcal{O}(\log^2(\max\{x, y\}))$, quadratisch in $|x| = \Theta(\log x), |y| = \Theta(\log y)$.

Optimierungsvariante vs Entscheidungsvariante

RUCKSACK$_{opt}$

- Gegeben: Gegenstände $1, \ldots, n$ mit Gewichten $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ und Profiten $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Kapazität B.
- Gesucht: $I \subseteq [n] : \sum_{i \in I} w_i \leqslant B$, so dass $\sum_{i \in I} p_i$ maximiert wird.

Sprache RUCKSACK:

$$\text{RUCKSACK} := \{(W, P, B, k) \mid \exists I \subseteq [n] : \textstyle\sum_{i \in I} w_i \leqslant B \text{ und } \sum_{i \in I} p_i \geqslant k\}.$$

Naiver Algorithmus zum Entscheiden von RUCKSACK

1. Für alle $I \subseteq [n]$:
   1. Falls $\sum_{i \in I} w_i \leqslant B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geqslant k$, akzeptiere.
2. Lehne ab.

- Prüfung von 2^n vielen Untermengen in Schritt 1.
- D.h. die Gesamtlaufzeit ist exponentiell in der Eingabelänge.
- Prüfung *einzelner potentieller Lösungen* in Schritt 1.1 ist effizient.

12. Woche: Verifizierer, nicht-deterministische Turingmaschine, Klasse $\mathcal{NP}$

Polynomielle Verifizierer und NP

Definition Polynomieller Verifizierer

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Eine DTM V heißt *Verifizierer für L*, falls V für alle Eingaben $w \in \Sigma^*$ hält und folgendes gilt:

$$w \in L \Leftrightarrow \exists c \in \Sigma^* : V \text{ akzeptiert Eingabe } (w, c).$$

Das Wort c nennt man einen *Zeugen oder Zertifikat für w*.

V heißt *polynomieller Verifizierer für L*, falls für alle $w \in \Sigma^*$ in Laufzeit polynomiell in $|w|$ hält und folgendes gilt:

$$w \in L \Leftrightarrow \exists c \in \Sigma^*, |c| \leqslant |w|^k, k \in \mathbb{N} : V \text{ akzeptiert Eingabe } (w, c).$$

L ist *polynomiell verifizierbar* $\Leftrightarrow \exists$ polynomieller Verifizierer für L.

Definition Klasse $\mathcal{NP}$

$$\mathcal{NP} := \{L \mid L \text{ ist polynomiell verifizierbar.}\}$$

Polynomieller Verifizierer für RUCKSACK

Satz

RUCKSACK $\in \mathcal{NP}$.

Beweis:

Algorithmus Polynomieller Verifizierer für RUCKSACK

Eingabe: (W, P, B, k, c) mit Zeuge $c = \subseteq [n]$

1. Falls $\sum_{i \in c} w_i \leqslant B$ und $\sum_{i \in c} p_i \geqslant k$, akzeptiere.
2. Lehne ab.

Laufzeit:

- Eingabegrößen: $\log w_i, \log p_i, \log B, \log k, n$
- Laufzeit: $\mathcal{O}(n \cdot \log(\max_i\{w_i, p_i, B, k\}))$ auf RAM.
- D.h. die Laufzeit ist polynomiell in den Eingabegrößen.

Optimaler Wert einer Lösung mittels Entscheidung

RUCKSACK$_{wert}$

- Gegeben: $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ und B.
- Gesucht: $\max_{I \subseteq [n]} \{\sum_{i \in I} p_i \mid \sum_{i \in I} w_i \leqslant B\}$

Sei M eine DTM, die RUCKSACK in Laufzeit $T(M)$ entscheide.

Algorithmus OPTIMUM

Eingabe: W, P, B

1. $\ell \leftarrow 0, r \leftarrow \sum_{i=1}^{n} p_i$
2. WHILE $(\ell \neq r)$
   1. Falls M bei Eingabe $(W, P, B, \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil)$ akzeptiert, $\ell \leftarrow \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil$.
   2. Sonst $r \leftarrow \lceil \frac{\ell+r}{2} \rceil - 1$.

Ausgabe: ℓ

- Korrektheit: Binäre Suche nach Optimum auf Intervall $[0, \sum_{i=1}^{n} p_i]$.
- Laufzeit: $\mathcal{O}(\log(\sum_{i=1}^{n} p_i)) \cdot T(M)$.
- Insbesondere: Laufzeit ist polynomiell, falls $T(M)$ polynomiell ist.

Optimale Lösung mittels optimalem Wert

Algorithmus Optimale Lösung

Eingabe: W, P, B

1. $opt \leftarrow \text{OPTIMUM}(W, P, B)$, $I \leftarrow \emptyset$
2. For $i \leftarrow 1$ to n
   1. Falls ($\text{OPTIMUM}(W \setminus \{w_i\}, P \setminus \{p_i\}, B) = opt$, setze $W \leftarrow W \setminus \{w_i\}, P \leftarrow P \setminus \{p_i\}$.
   2. Sonst $I \leftarrow I \cup \{i\}$.

Ausgabe: I

Korrektheit:

- Invariante vor i-tem Durchlauf: $\exists J \subseteq \{i, \ldots, n\}$: $I \cup J$ ist optimal.
- i wird nur dann in I aufgenommen, falls I zu optimaler Teilmenge erweitert werden kann.

- **Laufzeit:** $\mathcal{O}(n \cdot T(\text{OPTIMUM})) = \mathcal{O}(n \cdot \log(\sum_{i=1}^{n} p_i) \cdot T(M))$.
- D.h. Laufzeit ist polynomiell, falls $T(M)$ polynomiell ist.

Sprache Zusammengesetzt

$\textsc{Zusammengesetzt} := \{N \in \mathbb{N} \mid N = ab \text{ mit } a, b \in \mathbb{N},\ a, b \geqslant 2\}$

Satz

$\textsc{Zusammengesetzt} \in \mathcal{NP}$.

Beweis:

Algorithmus Polynomieller Verifizierer für $\textsc{Zusammengesetzt}$

Eingabe: (N, c) mit $c = (p, q) \in \{2, \ldots, N-1\}^2$

1. Berechne $p \cdot q$. Falls $p \cdot q = N$, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Laufzeit:

- Eingabelänge: $|N| = \Theta(\log N)$
- Laufzeit: $\mathcal{O}(\log^2 N)$, d.h. polynomiell in der Eingabelänge.

$\mathcal{P}$ versus $\mathcal{NP}$

Satz

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.

$L \in \mathcal{P}$ $\Rightarrow$ $\exists$ DTM M, die L in polynomieller Laufzeit entscheidet.

$\Rightarrow$ $\exists$ DTM M, die stets hält und genau die Eingaben $w \in L$ in Laufzeit polynomiell in $|w|$ akzeptiert.

$\Rightarrow$ $\exists$ DTM V, die stets hält und genau die Eingaben (w, c) mit $w \in L$, $c = \epsilon$ in Laufzeit polynomiell in $|w|$ akzeptiert. Dabei ignoriert V die Eingabe c und verwendet M auf w.

$\Rightarrow$ $L \in \mathcal{NP}$.

- **Großes offenes Problem:** Gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$?

Nichtdeterministische Turingmaschinen

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(S)$ die Potenzmenge einer Menge S.

Definition Nichtderministische Turingmaschine

Eine *nicht-deterministische Turingmaschine (NTM)* ist ein Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \sqcup, E)$ wobei

- $Q, \Sigma, \Gamma, s, \sqcup, E$ sind wie bei DTM definiert.
- δ ist nun eine Relation, nicht eine Funktion, i.e. $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, N, R\})$

Falls für jeden (q, a) es nur ein Element $\big((q, a), (q' \times a' \times e)\big)$ mit $e \in \{L, N, R\}$ in δ gibt, dann ist δ eine Funktion und die TM ist deterministisch.

- Bsp: δ enthält $(q, a) \times (q_1, a_1, L)$, und $(q, a) \times (q_2, a_2, R)$.
- NTM besitzt 2 Wahlmöglichkeiten für den Zustandsübergang.
- Beschränken uns oBdA auf NTMs mit $\leqslant 2$ Wahlmöglichkeiten.

Berechnungsbaum

- Seien die Konfigurationen einer NTM Knoten in einem Berechnungsbaum.
  - Die Startkonfiguration bildet den Wurzelknoten.
  - Mögliche Nachfolgekonfigurationen bilden Kinderknoten.
- Pfade heißen Berechnungspfade der NTM.
- Betrachten nur NTMs mit Berechnungspfaden endlicher Länge.
- Ein Berechnungpfad heißt akzeptierend, falls er in q_a endet.

Definition Akzeptierte Sprache einer NTM

Sei N eine NTM.

- N akzeptiert Eingabe $w \Leftrightarrow \exists$ akzeptierenden Berechnungspfad im Berechnungsbaum von N bei Eingabe w.
- Die von N akzeptierte Sprache $L(N)$ ist definiert als $L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid N \text{ akzeptiert die Eingabe } w.\}$.

Die Laufzeit einer NTM

Definition Laufzeit einer NTM

Sei N eine DTM mit Eingabe w.

- $T_N(w) :=$ **maximale** Anzahl Rechenschritte von N auf w,
  d.h. $T_N(w)$ ist die Länge eines längsten Berechnungspfades.
- $T_N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $T_N(n) := \max\{T_N(w) \mid w \in \Sigma^{\leq n}\}$
  heißt *Laufzeit* oder Zeitkomplexität von N.

- Wir definieren die Klasse NTIME für NTMs analog zur Klasse DTIME für DTMs.

Definition NTIME

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion.

$$\mathrm{NTIME}(t(n)) := \{L \mid L \text{ wird von NTM in Laufzeit } \mathcal{O}(t(n)) \text{ entschieden.}\}$$

NTM, die RUCKSACK entscheidet

Algorithmus NTM für RUCKSACK

Eingabe: W, P, B, k

1. Erzeuge nichtdeterministisch einen Zeugen $I \subseteq [n]$.
2. Falls $\sum_{i \in I} w_i \leq B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geq k$, akzeptiere.
3. Sonst lehne ab.

- D.h. NTM erzeugt sich im Gegensatz zum Verifizierer ihren Zeugen I selbst.
- Laufzeit: Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(n \cdot \log(\max_i\{w_i, p_i\}))$.
- D.h. die Laufzeit ist polynomiell in der Eingabelänge.

$\mathcal{NP}$ mittels NTMs

Satz

$\mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Sprachen, die von einer NTM in polynomieller Laufzeit entschieden wird, d.h.

$$\mathcal{NP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k).$$

Zeigen:

$\exists$ polynomieller Verifizierer für L

$\Leftrightarrow$ $\exists$ NTM N, die L in polynomieller Laufzeit entscheidet.

Verifizierer $\Rightarrow$ NTM

"$\Rightarrow$": Sei V ein Verifizierer für L mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^k)$ für ein festes k.

Algorithmus NTM N für L

Eingabe: w mit $|w| = n$.

1. Erzeuge nicht-deterministisch einen Zeugen c mit $|c| = \mathcal{O}(n^k)$.
2. Simuliere V mit Eingabe (w, c).
3. Falls V akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

- Korrektheit:
  $$w \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \text{ mit } |c| = \mathcal{O}(n^k) : V \text{ akzeptiert } (w, c).$$
  $$\Leftrightarrow \quad N \text{ akzeptiert die Eingabe } w \text{ in Laufzeit } \mathcal{O}(n^k).$$
- Damit entscheidet N die Sprache L in polynomieller Laufzeit.

NTM $\Rightarrow$ Verifizierer

"$\Leftarrow$: Sei N eine NTM, die L in Laufzeit $\mathcal{O}(n^k)$ entscheidet.

Algorithmus Verifizierer

Eingabe: w, c

1. c ist Codierung eines Berechnungspfades von N bei Eingabe w.
2. Simuliere N auf Eingabe w auf dem Berechnungspfad c.
3. Falls N akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Korrektheit:

$$w \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ akzeptierender Berechnungspfad } c \text{ von } N \text{ für } w$$
$$\Leftrightarrow \quad V \text{ akzeptiert } (w, c).$$

Laufzeit:

- Längster Berechnungspfad von N besitzt Länge $\mathcal{O}(n^k)$.
- D.h. die Gesamtlaufzeit von V ist ebenfalls $\mathcal{O}(n^k)$.

Boolesche Formeln

Definition Boolesche Formel

- Eine Boolesche Variable x_i kann Werte aus $\{0, 1\}$ annehmen, wobei $0 \cong$ falsch und $1 \cong$ wahr.
- Jede Boolesche Variable x_i ist eine Boolesche Formel.
- Sind ϕ, ψ Boolesche Formeln, so auch $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi$.
- Operatoren geordnet nach absteigender Priorität: $\neg, \wedge, \vee$.
- ϕ ist erfüllbar $\Leftrightarrow \exists$ Belegung der Variablen in ϕ mit $\phi = 1$.

Bsp:

- $\phi = \neg(x_1 \vee x_2) \wedge x_3$ ist erfüllbar mit $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$.
- $\psi = x_1 \wedge \neg x_1$ ist eine nicht-erfüllbare Boolesche Formel.

Satisfiability SAT

Definition SAT

SAT $:= \{\phi \mid \phi$ ist eine erfüllbare Boolesche Formel.$\}$

Codierung von ϕ:

- Codieren Variable x_i durch $\mathrm{bin}(i)$.
- Codieren ϕ über dem Alphabet $\{0, 1, (,), \neg, \wedge, \vee\}$.

SAT ist polynomiell verifizierbar.

Satz

SAT$\in \mathcal{NP}$.

Beweis

Algorithmus Polynomieller Verifizierer

EINGABE: $(\phi(x_1, \ldots, x_n), \mathbf{c})$, wobei $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \{0,1\}^n$.

- Falls $\phi(c_1, \ldots, c_n) = 1$, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Korrektheit:

- $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in$ SAT $\Leftrightarrow \exists$ Belegung $\mathbf{c} \in \{0,1\}^n : \phi(\mathbf{c}) = 1$

Laufzeit:

- Belegung von ϕ mit $\mathbf{c}$: $\mathcal{O}(|\phi|)$ auf RAM.
- Auswertung von ϕ auf $\mathbf{c}$: $\mathcal{O}(|\phi|^2)$ auf RAM.

Simulation von NTMs durch DTMs

Satz Simulation von NTM durch DTM

Sei N eine NTM, die die Sprache L in Laufzeit $t(n)$ entscheidet. Dann gibt es eine DTM M, die L in Zeit $\mathcal{O}(2^{t(n)})$ entscheidet.

Sei $B(w) = (V, E)$ der Berechnungsbaum von N bei Eingabe w.

Algorithmus DTM M für L

1. Führe Tiefensuche auf $B(w)$ aus.
2. Falls akzeptierender Berechnungspfad gefunden wird, akzeptiere.
3. Sonst lehne ab.

- Tiefensuche auf $B(w)$ benötigt Laufzeit $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(|V|)$.
- Berechnungspfade in $B(w)$ besitzen höchstens Länge $t(n)$.
- D.h. $B(w)$ besitzt höchstens $2^{t(n)}$ Blätter.
- Damit besitzt $B(w)$ höchstens $|V| \leqslant 2 \cdot 2^{t(n)} - 1$ viele Knoten.
- D.h. die Gesamtlaufzeit ist $\mathcal{O}(2^{t(n)})$.

Polynomielle Reduktion

Definition Polynomiell berechenbare Funktion

Sei Σ ein Alphabet und $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. Die Funktion f heißt polynomiell berechenbar gdw. eine DTM M existiert, die für jede Eingabe w in Zeit polynomiell in $|w|$ den Wert $f(w)$ berechnet.

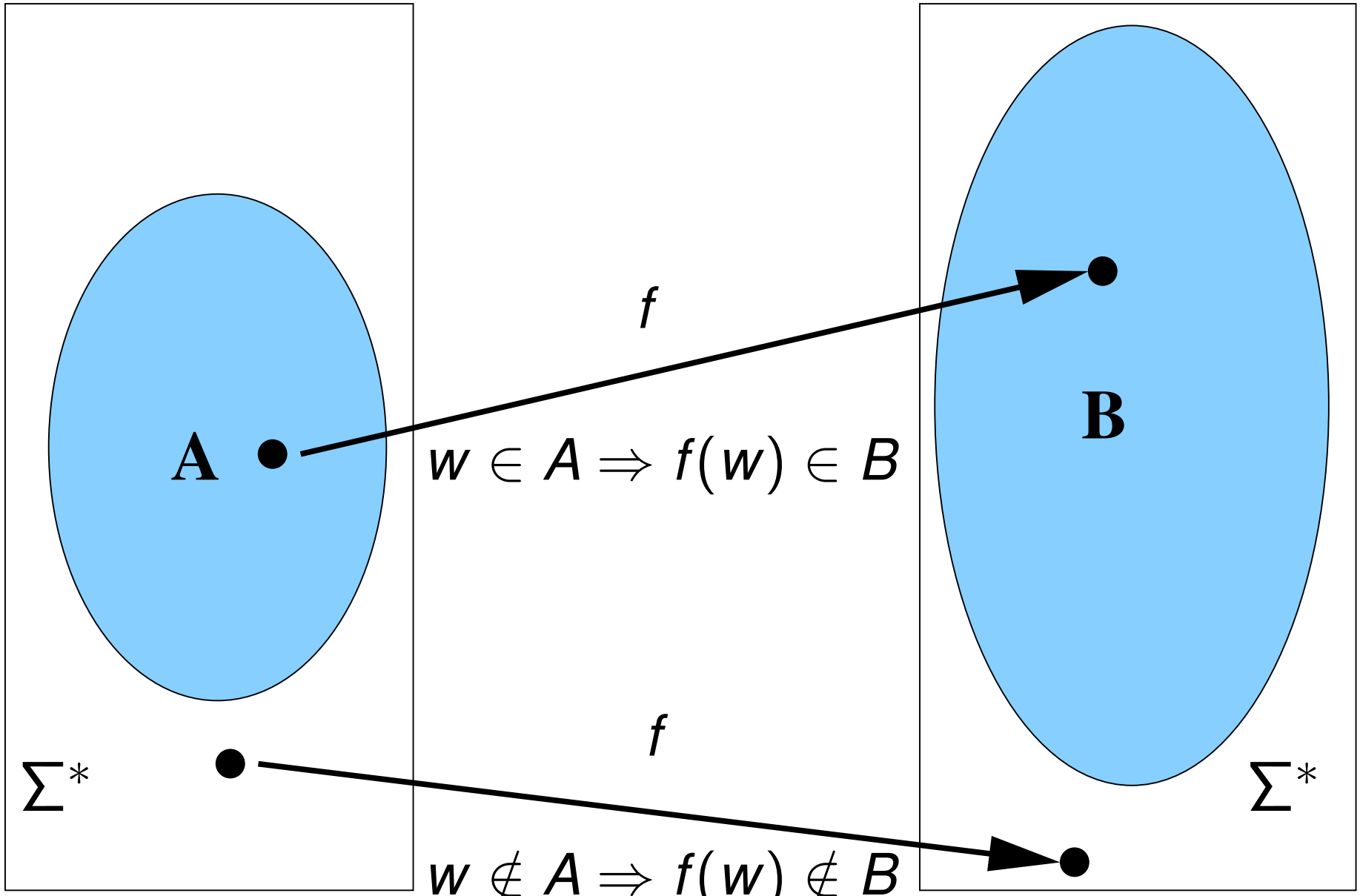
Definition Polynomielle Reduktion

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Sprachen. A heißt *polynomiell reduzierbar auf* B, falls eine polynomiell berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert mit

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$

Wir schreiben $A \leqslant_p B$ und bezeichen f als *polynomielle Reduktion*.

Graphische Darstellung $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$



A ist nicht schwerer als B.

Satz $\mathcal{P}$-Reduktionssatz

Sei $A \leqslant_p B$ und $B \in \mathcal{P}$. Dann gilt $A \in \mathcal{P}$.

- Wegen $B \in \mathcal{P}$ existiert DTM M_B, die B in polyn. Zeit entscheidet.
- Wegen $A \leqslant_p B$ existiert DTM M_f, die f in polyn. Zeit berechnet.

Algorithmus DTM M_A für A

Eingabe: w

1. Berechne $f(w)$ mittels M_f auf Eingabe w.
2. Falls M_B auf Eingabe $f(w)$ akzeptiert, akzeptiere. Sonst lehne ab.

Korrektheit:

- M_A akzeptiert $w \Leftrightarrow M_B$ akzeptiert $f(w) \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow w \in A$.

Laufzeit:

- $T(M_A) = \mathcal{O}(T(M_f) + T(M_B))$, d.h. polynomiell in $|w|$.

Transitivität polynomieller Reduktionen

Satz Transitivität von $\leqslant_p$

Seien $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ Sprachen mit $A \leqslant_p B$ und $B \leqslant_p C$. Dann gilt $A \leqslant_p C$.

- Sei f die polynomielle Reduktion von A auf B, d.h.
$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$
- Sei g die polynomielle Reduktion von B auf C, d.h.
$$v \in B \Leftrightarrow g(v) \in C \quad \text{für alle } v \in \Sigma^*.$$
- Dann gilt insbesondere $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow g(f(w)) \in C$.
- Damit ist die Komposition $g \circ f$ eine Reduktion von A auf C.
- $g \circ f$ kann in polynomieller Zeit berechnet werden durch Hintereinanderschaltung der polynomiellen DTMs M_f und M_g für f und g:
  - $k, k', \tilde{k} \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $T(M_f(w)) = \mathcal{O}(|w|^k)$, $T(M_g(v)) = \mathcal{O}(|v|^{k'})$ und $|f(w)| = \mathcal{O}(|w|^{\tilde{k}})$ für alle w, v.
  - Also für $v = f(w)$ ist es $T(M_g \circ M_f(w)) = \mathcal{O}(|w|^k) + \mathcal{O}((|w|^{\tilde{k}})^{k'})$, d.h. polynomiell.

13. Woche: NP-Vollständigkeit
Satz von Cook-Levin
Anwendungen in der Kryptographie

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Definition $\mathcal{NP}$-vollständig

Sei L eine Sprache. Wir bezeichnen L als $\mathcal{NP}$-vollständig, falls

1. $L \in \mathcal{NP}$
2. Für **jede** Sprache $A \in \mathcal{NP}$ gilt: $A \leqslant_p L$.

Separation oder Gleichheit von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$, I

Satz

Sei L eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache und $L \in \mathcal{P}$. Dann gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Beweis:

- Wir zeigen für ein beliebiges $A \in \mathcal{NP}$, dass $A \in \mathcal{P}$.
- Da $A \in \mathcal{NP}$ und L $\mathcal{NP}$-vollständig ist, gilt $A \leqslant_p L$.
- Nach Voraussetzung gilt $L \in \mathcal{P}$.
- $\mathcal{P}$-Reduktionssatz: Aus $A \leqslant_p L$, $L \in \mathcal{P}$ folgt $A \in \mathcal{P}$.
- Da dies für ein beliebiges $A \in \mathcal{NP}$ gilt, folgt $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}$.
- Wegen $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$ gilt schließlich $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Separation oder Gleichheit von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$, II

Die $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme bilden die Menge der schwierigsten Probleme in $\mathcal{NP}$.

Der Satz von Richard Ladner (1975)

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existieren Probleme in $\mathcal{NP}$, die weder $\mathcal{NP}$-vollständig sind, noch in $\mathcal{P}$ liegen – sie bilden die Klasse $\mathcal{NPI}$ (Nicht-deterministisch Polynomiell, Intermediate).

Für den Beweis des Satzes wurde von Ladner ein künstliches Problem generiert, welches keinerlei praktische Relevanz besitzt.

Es ist nicht bekannt, ob auch „natürliche“ Probleme in $\mathcal{NPI}$ liegen. Es wird jedoch vermutet, dass dies z.B. für die Primfaktorzerlegung gilt.

Ladner, Richard: On the Structure of Polynomial Time Reducibility. Journal of the ACM (JACM) 22 (1): 155–171, 1975.

$\mathcal{NP}$ Vollständigkeits-Beweise

Satz $\mathcal{NP}$-Reduktionssatz

Seien B, L Sprachen. Sei L $\mathcal{NP}$-vollständig, $B \in \mathcal{NP}$ und $L \leqslant_p B$. Dann ist auch B $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: Müssen zeigen, dass $A \leqslant_p B$ für alle $A \in \mathcal{NP}$.

- Da L $\mathcal{NP}$-vollständig ist, gilt $A \leqslant_p L$ für beliebiges $A \in \mathcal{NP}$.
- Ferner gilt nach Voraussetzung $L \leqslant_p B$.
- Aus der Transitivität von $\leqslant_p$ folgt: $A \leqslant_p B$.
- Damit ist B ebenfalls $\mathcal{NP}$-vollständig.

Problem: Wir benötigen ein *erstes* $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem.

Satz von Cook-Levin (1971)

Satz von Cook-Levin

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: Müssen zeigen

1. SAT $\in \mathcal{NP}$ (bereits gezeigt)
2. Für alle $L \in \mathcal{NP}$ existiert polynomiell berechenbare Reduktion f:

$$w \in L \Leftrightarrow f(w) \in \text{SAT}.$$

Beweisidee: Sei $L \in \mathcal{NP}$ beliebig.

- $\exists$ NTM N mit polynomieller Laufzeit n^k mit

$$w \in L \Leftrightarrow N \text{ akzeptiert } w.$$

- Konstruieren aus (N, w) eine Formel ϕ mit
  1. N akzeptiert $w \Leftrightarrow f(w) = \phi \in \text{SAT}$
  2. f ist in Zeit polynomiell in $|w| = n$ berechenbar.
- Betrachten dazu eine $(n^k + 1) \times (n^k + 1)$ Berechnungstabelle von N.

Berechnungstabelle T von N auf w

q_0	$\triangleright$	w_1	$\ldots$	w_n	$\sqcup$	$\ldots$	$\sqcup$
$\triangleright$	q_i	w_1 $\vdots$	$\ldots$	w_n	$\sqcup$	$\ldots$ $\vdots$	$\sqcup$

- Tabelle T entspricht einem Pfad im Berechnungsbaum.
- Erste Zeile enthält die Startkonfiguration.
- $(i+1)$-te Zeile ist *mögliche* Nachfolgekonfiguration der i-ten Zeile: wenn die NTM doch nicht-deterministisch ist, dann gibt es mehrere Möglichkeiten, die Tabelle zu belegen.
- In Laufzeit n^k können höchstens n^k Zellen besucht werden.
- T akzeptierend $\Leftrightarrow$ T enthält eine akzeptierende Konfiguration.
- Konstruieren ϕ derart, dass ϕ erfüllbar ist gdw. eine mögliche Belegung von T akzeptierend ist.

Struktur der Formel für ϕ

- Sei $T(i,j)$ der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von T.
- $T(i,j) \in Q \cup \Gamma$ für alle i,j.
- Definieren ϕ über den Booleschen Variablen $x_{i,j,\sigma}$ mit

$$x_{i,j,\sigma} = 1 \Leftrightarrow T(i,j) = \sigma \quad \text{für } \sigma \in Q \cup \Gamma.$$

Formel für ϕ: $\phi = \phi_{Start} \wedge \phi_{accept} \wedge \phi_{Eintrag} \wedge \phi_{move}$ mit

ϕ_{Start}: T beginnt mit Startkonfiguration.

ϕ_{accept}: T muss Eintrag q_a besitzen.

$\phi_{Eintrag}$: T enthält Einträge aus $Q \cup \Gamma$.

ϕ_{move}: T besitzt gültige Nachfolgekonfigurationen.

Definition von $\phi_{Start}, \phi_{accept}$ und $\phi_{Eintrag}$

ϕ_{Start}: Codieren die Startkonfiguration $q_0 \triangleright w_1 \dots w_n$

$$x_{1,1,q_0} \wedge x_{1,2,\triangleright} \wedge x_{1,3,w_1} \wedge \dots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \dots \wedge x_{1,n^k+1,\sqcup}$$

ϕ_{accept}: ϕ ist erfüllend gdw T eine erfüllende Konfiguration enthält

$$\phi_{accept} = \bigvee_{1 \leqslant i,j \leqslant n^k+1} x_{i,j,q_a}$$

$\phi_{Eintrag}$: $T(i,j) \in Q \cup \Gamma$, d.h. es gibt ein $\sigma \in Q \cup \Gamma$ mit $x_{i,j,\sigma} = 1$.

- $T(i,j)$ enthält mindestens einen Eintrag $\sigma \in Q \cup \Gamma$:

$$\phi_{\geqslant 1} = \bigvee_{\sigma \in Q \cup \Gamma} x_{i,j,\sigma}.$$

- $T(i,j)$ enthält höchstens einen Eintrag $\sigma \in Q \cup \Gamma$:

$$\phi_{\leqslant 1} = \bigwedge_{\sigma,\tau \in Q \cup \Gamma, \sigma \neq \tau} \neg(x_{i,j,\sigma} \wedge x_{i,j,\tau}).$$

- Liefert insgesamt $\phi_{Eintrag} = \bigwedge_{1 \leqslant i,j \leqslant n^k+1} (\phi_{\geqslant 1} \wedge \phi_{\leqslant 1})$.

Definition von ϕ_{move}

Ziel: Zeile $i+1$ muss mögliche Nachfolgekonfiguration von Zeile i sein.

- Definieren Fenster F der Größe 2×3.
- (i,j)-Fenster besitzt Einträge $(i,j-1),(i,j),(i,j+1)$ und $(i+1,j-1),(i+1,j),(i+1,j+1)$.
- Tabelle T besitzt (i,j)-Fenster für $i = 1,\ldots,n^k$, $j = 2,\ldots,n^k$.
- Fenster F heißt legal gwd F's Einträge δ *nicht widersprechen*.

Beispiele für legale Fenster

Sei δ wie folgt definiert

$$\delta := \{((q_1, a), (q_1, b, R)), ((q_1, b), (q_2, c, L), (q_2, a, R)) \\ ((q_1, b), (q_2, c, L), (q_2, a, R))\} \\ \subseteq (Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, N, R\})$$

a	q_1	b
q_2	a	c

legal

a	q_1	b
a	a	q_2

legal

a	b	b
a	a	b

nicht legal

a	a	q_1
a	a	b

legal

a	q_1	b
q_1	a	a

nicht legal

$\sqcup$	b	a
$\sqcup$	b	a

legal

a	q_1	b
q_2	b	q_2

nicht legal

a	b	a
a	b	q_2

legal

b	b	b
c	b	b

legal

Korrektheit der Konstruktion

Lemma Korrektheit Berechnungstabelle

Sei T eine Tabelle mit den folgenden Eigenschaften.

1. Die erste Zeile ist die Startkonfiguration von N auf w.
2. Jedes Fenster ist legal.

Dann ist T eine Berechnungstabelle von N auf Eingabe w und entspricht somit einem Berechnungspfad von N.

- $T(i,j) \neq T(i+1,j)$ ist nur dann möglich, falls einer der Einträge $T(i,j-1)$, $T(i,j)$ oder $T(i,j+1)$ einen Zustand enthält.
- Falls die obere Zeile einen Zustand ändert, muss sich die untere Zeile gemäß δ ändern.
- D.h. jede Zeile ist eine Nachfolgekonfiguration der Vorgängerzeile.
- Damit ist T eine Berechnungstabelle.

Konstruktion von ϕ_{move}

- Informal gilt: $\phi_{move} = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n^k, 2 \leqslant j \leqslant n^k}$ Fenster (i, j) ist legal.
- Die Anzahl legaler Fenster hängt nur von den möglichen Übergängen in N ab, nicht von der Eingabe w.
- D.h. es gibt eine Menge F von 6-Tupeln $(f_1, \ldots, f_6)$, so dass F alle legalen Fenster beschreibt.
- Damit können wir das Prädikt [Fenster (i, j) ist legal] formalisieren

$$\bigvee_{(f_1,\ldots,f_6) \in F} (x_{i,j-1,f_1} \wedge x_{i,j,f_2} \wedge x_{i,j+1,f_3} \wedge x_{i+1,j-1,f_4} \wedge x_{i+1,j,f_5} \wedge x_{i+1,j+1,f_6}).$$

Reduktion ist polynomiell

Lemma Länge von ϕ

Sei N eine NTM mit Laufzeit n^k bei Eingabe w, $|w| = n$. Dann besitzt die Formel $\phi = \phi_{Start} \wedge \phi_{accept} \wedge \phi_{Eintrag} \wedge \phi_{move}$ Länge $\mathcal{O}(n^{2k})$, d.h. Länge polynomiell in n.
Zudem ist ϕ bei Eingabe (N, w) in Zeit $\mathcal{O}(n^{2k})$ berechenbar.

ϕ_{Start}:
- Anzahl Literale: $\mathcal{O}(n^k)$, Berechnung direkt aus w

ϕ_{accept}:
- Anzahl Literale: $\mathcal{O}(n^{2k})$

$\phi_{Eintrag}$:
- Anzahl Literale in $\phi_{\geqslant 1}, \phi_{\leqslant 1}$: $\mathcal{O}(1)$, unabhängig von w.
- Anzahl Literale in $\phi_{Eintrag}$: $\mathcal{O}(n^{2k})$.

ϕ_{move}:
- Anzahl legaler Fenster $|F|$: $\mathcal{O}(1)$, unabhängig von w.
- Anzahl Literale in ϕ_{move}: $\mathcal{O}(n^{2k})$.

Fazit

Es ist klar, dass es eine $1-1$ Korrespondenz gibt zwischen korrekten (legalen) Berechnungstabellen von N (also, von Berechnungspfaden von N) und Belegungen der Variablen von ϕ, und eine akzeptierende Berechnungstabelle existiert gdw eine erfüllbare Belegung von ϕ existiert.

Die Konstruktion von T ist quadratisch in der Laufzeit von der NTM N, also polynomiell in der Eingabelänge n.

Somit ist der Satz von Cook-Levin bewiesen.

Kryptographische Anwendungen.

Diffie-Hellman Schlüsselaustausch (1976)

Öffentliche Parameter: Primzahl p, Generator g von $\mathbb{Z}_p^*$

Protokoll Diffie-Hellman Schlüsselaustausch

EINGABE: p, g

1. Alice wählt $\alpha \in_R \mathbb{Z}_{p-1}$ und schickt $g^\alpha \bmod p$ an Bob.
2. Bob wählt $\beta \in_R \mathbb{Z}_{p-1}$ und schickt $g^\beta \bmod p$ an Alice.
3. Alice berechnet $\left(g^\beta\right)^\alpha = g^{\alpha\beta}$, Bob analog $\left(g^\alpha\right)^\beta = g^{\alpha\beta}$.

Gemeinsamer geheimer DH-Schlüssel: $g^{\alpha\beta}$.

- Angreifer Eve erhält g, g^α, g^β.
- **Sicherheit:** Eve kann $g^{\alpha\beta}$ nicht von g^y, $y \in_R \mathbb{Z}_{p-1}$ unterscheiden.

Definition Decisional Diffie-Hellman (DDH)

Sei p prim, g Generator von $\mathbb{Z}_p^*$. Wir definieren die Sprache

$$\mathrm{DDH} := \{(g^\alpha, g^\beta, g^y) \mid g^y = g^{\alpha\beta}\}.$$

Das ElGamal Kryptosystem (1984)

Parameter des ElGamal Kryptosystems:

öffentlich: p prim, g Generator von $\mathbb{Z}_p^*$, g^a

geheim: $a \in \mathbb{Z}_{p-1}$

Algorithmus ElGamal Ver- und Entschlüsselung

- Verschlüsselung von $m \in \mathbb{Z}_p$ unter Verwendung von p, g, g^a.
  - Wähle $r \in_R \mathbb{Z}_{p-1}$.
  - Berechne $Enc(m) = (\gamma, \delta) = (g^r, m \cdot (g^a)^r) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p$.
- Entschlüsselung von $Enc(m)$ unter Verwendung von p, a.
  - Berechne $Dec(Enc(m)) = \frac{\delta}{\gamma^a} = \frac{m \cdot g^{ar}}{g^{ar}} = m$.

Laufzeit:

- Verschlüsselung: $\mathcal{O}(\log r \cdot \log^2 p) = \mathcal{O}(\log^3 p)$
- Entschlüsselung: $\mathcal{O}(\log a \cdot \log^2 p) = \mathcal{O}(\log^3 p)$

Sicherheit von ElGamal

Intuitiv: Eve soll $\delta = m \cdot g^{ab}$ nicht von $x \in_R \mathbb{Z}_p$ unterscheiden können.

Protokoll Unterscheider

EINGABE: p, g, g^a

1. Eve wählt $m \in \mathbb{Z}_p^*$ und schickt m an Alice. (Man beachte: $m \neq 0$.)
2. Alice wählt $b \in \{0, 1\}$:
   - Falls $b = 0$: Sende $Enc(m) = (g^r, m \cdot g^{ar})$ an Eve zurück.
   - Falls $b = 1$: Sende $(g^r, x) \in_R \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$ an Eve zurück.

Eves AUSGABE: $b' \in \{0, 1\}$

- Eve gewinnt das Spiel gdw $b' = b$.
- D.h. Eve muss δ von einer Zufallszahl x unterscheiden.

Definition Sprache ElGamal

Sei p prim und g ein Generator von $\mathbb{Z}_p^*$. Wir definieren

$$\text{ELGAMAL} := \{g^a, g^r, m, x \mid x = m \cdot g^{ar} \bmod p\}.$$

Sicherheitsbeweis per Reduktion

Satz Sicherheit von ElGamal unter DDH

Das ElGamal Kryptosystem ist sicher gegen polynomielle Angreifer unter der Annahme, dass DDH nicht effizient entscheidbar ist.

Logik des Beweises:

- Zeigen: DDH $\leqslant_p$ ELGAMAL
- D.h. jeder polynomielle Algorithmus für ELGAMAL liefert einen polynomiellen Algorithmus für DDH.
- **Annahme:** Es existiert ein polynomieller Angreifer A, der Verschlüsselungen von Zufallszahlen unterscheiden kann.
- Dann gibt es einen Algorithmus, der in polynomieller Zeit DH-Schlüssel $g^{\alpha\beta}$ von Zufallszahlen unterscheidet.
- **Widerspruch:** Nach Annahme gibt es keinen effizienten Algorithmus zum Entscheiden von DH-Schlüsseln $g^{\alpha\beta}$.
- Daher kann es auch keinen polynomiellen Angreifer A geben.

Reduktion f

Algorithmus M_f

EINGABE: $g^\alpha, g^\beta, g^y \in \mathbb{Z}_p^*$

1. Setze $g^a \leftarrow g^\alpha$ und $g^r \leftarrow g^\beta$.
2. Wähle $m \in_R \mathbb{Z}_p^*$.
3. Berechne $x = m \cdot g^y \bmod p$.

AUSGABE: g^a, g^r, m, x

Laufzeit:

- Eingabelänge: $\Omega(\log p)$
- Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(\log^2(p))$

Korrektheit Reduktion: $w \in \text{DDH} \leqslant_p f(w) \in \text{ElGamal}$

Sei $(g^\alpha, g^\beta, g^y) \in \text{DDH}$.

- Dann gilt $g^y = g^{\alpha\beta} = g^{ar}$.
- Damit ist $x = m \cdot g^y = m \cdot g^{ar}$ korrekte Verschlüsselung von m.
- D.h. $(g^a, g^r, m, x) \in \text{ElGamal}$

Sei $f(g^\alpha, g^\beta, g^y) = (g^a, g^r, m, x) \in \text{ElGamal}$.

- Dann ist $x = m \cdot g^y$ eine korrekte Verschlüsselung von m.
- D.h. $d(m) = \frac{m \cdot g^y}{g^{ar}} = m$ und damit $g^y = g^{ar} = g^{\alpha\beta}$.
- Dann ist $(g^\alpha, g^\beta, g^y) \in \text{DDH}$.

Brechen von ElGamal ist nicht schwerer als DDH

Satz

ELGAMAL $\leq_p$ DDH

Beweis: Wir definieren die folgende Reduktion f.

Algorithmus M_f

EINGABE: $g^a, g^r, m, x \in \mathbb{Z}_p^*$

1. Setze $g^\alpha \leftarrow g^a$ und $g^\beta \leftarrow g^r$.
2. Berechne $g^y = \frac{x}{m}$.

AUSGABE: g^α, g^β, g^y

Laufzeit:

- Eingabelänge: $\Omega(\log p)$
- Laufzeit: $\mathcal{O}(\log^2 p)$

Korrektheit von f: $w \in$ ElGamal $\Leftrightarrow f(w) \in$ DDH

Sei $(g^a, g^r, m, x) \in$ ElGamal.

- Dann ist $x = m \cdot g^{ar}$ korrekte Verschlüsselung von m.
- Damit gilt $\frac{x}{m} = g^{ar} = g^{\alpha\beta} = g^y$.
- D.h. $(g^\alpha, g^\beta, g^y) \in$ DDH.

Sei $f(g^a, g^r, m, x) = (g^\alpha, g^\beta, g^y) \in$ DDH.

- Dann gilt $g^y = g^{\alpha\beta} = g^{ar}$.
- Damit folgt $x = m \cdot g^y = m \cdot g^{ar}$ ist Verschlüsselung von m.
- D.h. $(g^a, g^r, m, x) \in$ ElGamal.

13. Woche
Extra-Material: Beispiele von Problemen in $\mathcal{NP}$

Konjunktive Normalform

Definition Konjunktive Normalform (KNF)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Boolesche Variablen und ϕ eine Boolesche Formel.

- Wir bezeichnen die Ausdrücke x_i und $\neg x_i$ als *Literale*.
- *Klauseln* sind disjunktive Verknüpfungen von Literalen.
- ϕ ist in KNF, falls ϕ eine Konjunktion von Klauseln ist.
- Eine KNF Formel ϕ ist in 3-KNF, falls jede Klausel genau 3 Literale enthält.

Bsp:

- $\neg x_1 \vee x_2$ und x_3 sind Klauseln.
- $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge x_3$ ist in KNF.
- $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_3 \vee x_3)$ ist in 3-KNF.

Die Sprache 3-SAT

Definition 3SAT

3SAT$:= \{\phi \mid \phi$ ist eine erfüllbare 3-KNF Boolesche Formel.$\}$

- Offenbar gilt 3SAT $\subset$ SAT.

Satz

3SAT$\in \mathcal{NP}$.

Beweis

Algorithmus NTM für 3SAT

Eingabe: $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in$ 3-KNF

1. Rate nicht-deterministisch eine Belegung $(c_1, \ldots, c_n) \in \{0,1\}^n$.
2. Falls $\phi(c_1, \ldots, c_n) = 1$, akzeptiere. Sonst lehne ab.

- Laufzeit Schritt 1: $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(|\phi|)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(|\phi|)$.
- D.h. die Laufzeit ist polynomiell in der Eingabelänge $|\phi|$.

Von SAT zu 3SAT

Satz

3SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

- Modifizieren zunächst vorigen Beweis derart, dass ϕ in KNF ist.
- ϕ_{start} und ϕ_{accept} sind bereits in KNF.
- $\phi_{Eintrag} = \bigwedge_{i,j}(\phi_{\geqslant 1} \wedge \phi_{\leqslant 1}) = \bigwedge_{i,j} \phi_{\geqslant 1} \wedge \bigwedge_{i,j} \phi_{\leqslant 1}$
  - $\phi_{\geqslant 1}$ besteht aus einer Klausel.
  - Schreiben $\phi_{\leqslant 1}$ als Konjunktion von Klauseln:

$$\phi_{\leqslant 1} = \bigwedge_{s \neq t} (\neg x_{i,j,s} \vee \neg x_{i,j,t}) .$$

- ϕ_{move}: Wandle disjunktive Normalform des Prädikats für legale Fenster

$$\bigvee_{(f_1,\ldots,f_6)\in F} (x_{i,j-1,f_1} \wedge x_{i,j,f_2} \wedge \ldots \wedge x_{i+1,j+1,f_6}).$$

  in KNF um. Umwandlung in $\mathcal{O}(1)$, da $|F|$ unabhängig von $|w| = n$.

Umwandlung von KNF in 3-KNF

Sei $\phi = k_1 \wedge \ldots \wedge k_m$ eine KNF-Formel, wobei $k_j = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ eine Klausel mit $n > 3$ Literalen ist.

- Führen neue Variablen $z_1, \ldots, z_{n-3}$ ein.
- Ersetzen Klausel k_j durch die 3-KNF Formel

$$k'_j = (a_1 \vee a_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee a_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee a_4 \vee z_3) \wedge \ldots \wedge (\neg z_{n-3} \vee a_{n-1} \vee a_n)$$

- B ist eine erfüllende Belegung für k_j gdw ein Literal a_i wahr ist.
- Dann ist aber k'_j erfüllbar mit $a_i = 1$ und

$$z_j = 1 \text{ für } j < i - 1 \quad \text{und} \quad z_j = 0 \text{ für } j \geqslant i - 1.$$

- Sei andererseits k'_j erfüllbar.
- Dann muss ein Literal a_i wahr sein, und damit ist k erfüllbar.

- Können ϕ in KNF bzw. in 3-KNF in $\mathcal{O}(|\phi|)$ Schritten umwandeln.

Clique

Definition Clique

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. $C \subseteq V$, $|C| = k$ heißt k-Clique in G, falls je zwei Knoten in C durch eine Kante verbunden sind.

$$\text{CLIQUE} := \{(G, k) \mid G \text{ enthält eine } k\text{-Clique.}\}$$

Satz

$3\text{SAT} \leqslant_p \text{CLIQUE}$

Zu zeigen: Es gibt eine Reduktion f mit

1. f ist eine polynomiell berechenbare Funktion
2. $\phi \in 3\text{SAT} \Leftrightarrow f(\phi) = (G, k) \in \text{CLIQUE}$

Idee für die Reduktion: Konstruiere (G, k) derart, dass

ϕ erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ erfüllende Belegung B für ϕ.
$\Leftrightarrow$ B setzt in jeder Klausel mind. ein Literal auf wahr.
$\Leftrightarrow$ Wahre Literale entsprechen einer k-Clique in G.

CLIQUE: Die Reduktion f

Algorithmus M_f für f

Eingabe: $\phi = (a_{11} \vee a_{12} \vee a_{13}) \wedge \ldots \wedge (a_{n1} \vee a_{n2} \vee a_{n3})$

1. Wahl der Knotenmenge V von G
   - Definiere $3n$ Knoten mit Labeln a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} für $i = 1, \ldots, n$.
2. Wahl der Kantenmenge E: Setze Kante $(u, v) \in E$ **außer** wenn
   - u, v entsprechen Literalen derselben Klausel, denn die Clique soll aus Literalen verschiedener Klauseln bestehen.
   - Label von u ist Literal x und Label von v ist $\neg x$, denn x soll nicht gleichzeitig auf wahr und falsch gesetzt werden (Konsistenz).
3. Wahl von k.
   - Setze $k = n$, denn alle Klauseln sollen erfüllt werden.

Ausgabe: (G, k)

zu zeigen: f ist polynomiell berechenbar.

- Laufzeit Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(n^2)$, Schritt 3: $\mathcal{O}(1)$.
- Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n^2)$ ist polynomiell in der Eingabelänge.

CLIQUE: Korrektheit der Reduktion

Zeigen zunächst: $\phi \in 3SAT \Rightarrow f(\phi) = (G, k) \in$ CLIQUE

- Sei $\phi \in 3SAT$. Dann besitzt ϕ eine erfüllende Belegung B.
- Damit setzt B in jeder Klausel $(a_{i1} \vee a_{i2} \vee a_{i3})$, $i = 1, \ldots, n$ mindestens ein Literal $a_{i\ell_i}, \ell_i \in [3]$ auf wahr.
- Die n Knoten mit Label $a_{i\ell_i}$ in G sind paarweise verbunden, da
  - die Literale $a_{i\ell_i}$ aus verschiedenen Klauseln stammen.
  - B ist eine konsistente Belegung, d.h. dass die Literale $a_{i\ell_i}$ von B alle konsistent auf wahr gesetzt werden.
- Die n Knoten mit Label $a_{i\ell_i}$ bilden eine n-Clique in G.
- D.h. $f(\phi) = (G, k) \in$ CLIQUE

CLIQUE: Korrektheit von f: Rückrichtung

Zeigen: $f(\phi) = (G, k) \in \text{CLIQUE} \Rightarrow \phi \in 3\text{SAT}$

- Sei $f(\phi) = (G, k) \in \text{CLIQUE}$. Dann besitzt G eine n-Clique $v_1, \ldots, v_n$.
- Nach Konstruktion der Kantenmenge von E gilt:
  1. $v_1, \ldots, v_n$ korrespondieren zu Variablen in verschiedenen Klauseln.
  2. $\nexists v_i, v_j$ mit Labeln x und $\neg x$.
- Sei B diejenige Belegung, die die Label von $v_1, \ldots, v_n$ wahr setzt.
  1. B setzt in jeder Klausel ein Literal v_i auf wahr.
  2. B ist eine konsistente Belegung.
- Damit ist B ist eine erfüllende Belegung für ϕ.
- D.h. $\phi \in 3\text{SAT}$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Satz

CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: zu zeigen

1. CLIQUE $\in \mathcal{NP}$
   - Übung
2. $\exists$ $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache L mit $L \leqslant_p$ CLIQUE
   - Bereits gezeigt: 3SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.
   - Bereits gezeigt: 3SAT $\leqslant_p$ CLIQUE.

Knotenüberdeckung

Definition k-Knotenüberdeckung

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Knotenmenge $U \subseteq V$, $|U| = k$ heißt *k-Knotenüberdeckung*, falls

$$e \cap U \neq \emptyset \text{ für alle } e \in E.$$

Wir definieren die folgende Sprache.

$$\text{KNOTENÜBERDECKUNG} := \{(G, k) \mid G \text{ besitzt eine } k\text{-Knotenüberdeckung.}\}$$

Satz

KNOTENÜBERDECKUNG ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: zu zeigen

1. KNOTENÜBERDECKUNG $\in \mathcal{NP}$ (Übung)
2. 3-SAT $\leqslant_p$ KNOTENÜBERDECKUNG, d.h. es gibt berechenbares f:
$$\phi \in \text{3SAT} \Leftrightarrow f(\phi) = (G, k) \in \text{KNOTENÜBERDECKUNG}$$

Die Reduktion f

Idee der Reduktion f:

- Konstruieren für jedes Literal x_i Knotenpaar mit Labeln x_i und $\neg x_i$.
- Knotenlabel einer Überdeckung bilden erfüllende Belegung.

Algorithmus M_f

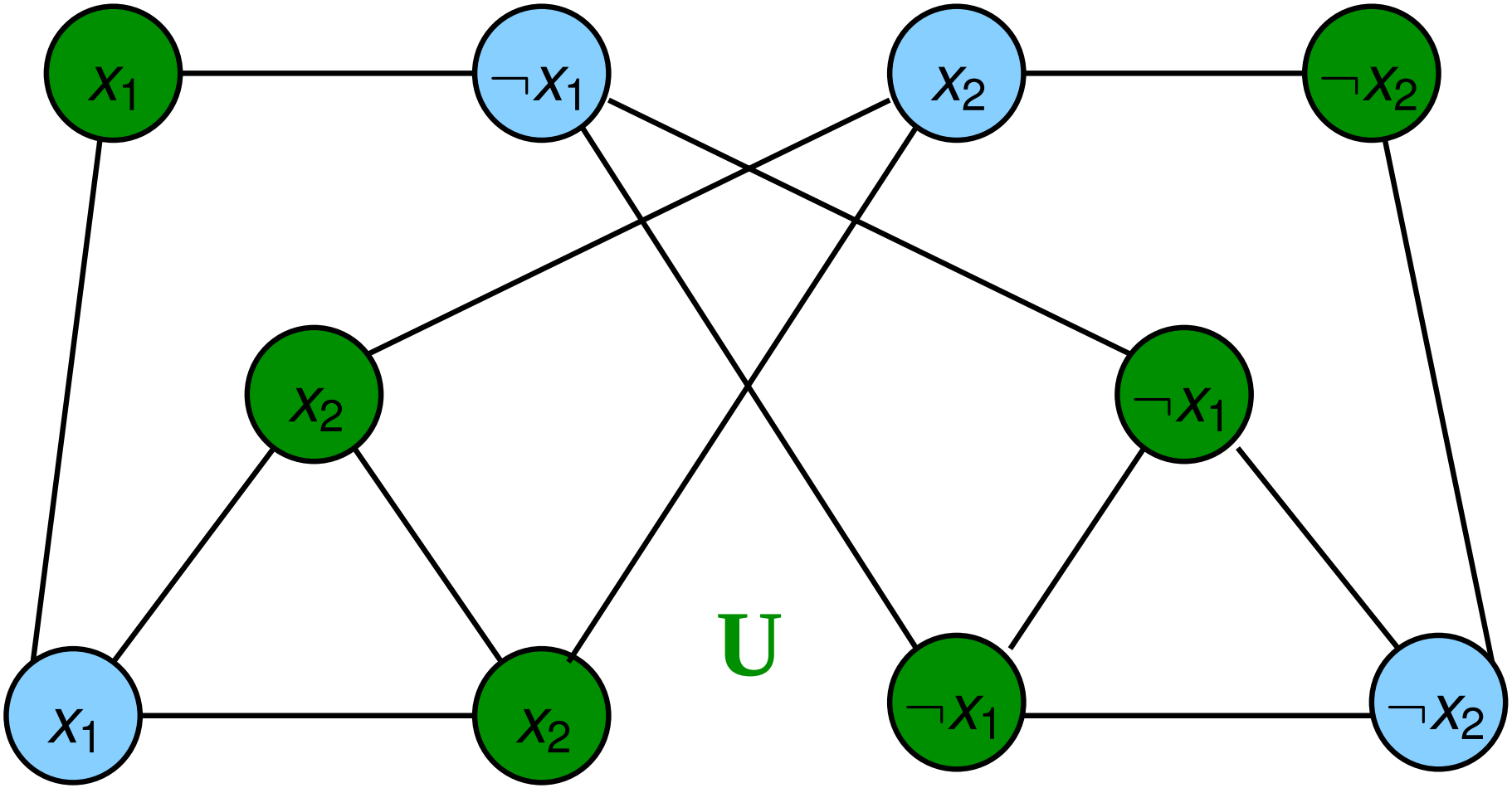
Eingabe: $\phi(x_1, \ldots, x_n) = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ mit $K_j = \ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3}$.

1. Variablenknoten: Für $i = 1 \ldots n$:
   - Konstruiere zwei verbundene Knoten mit Labeln x_i und $\neg x_i$.
2. Klauselknoten: Für $j = 1 \ldots m$:
   - Konstruiere 3 paarweise verbundene Knoten mit Labeln $\ell_{j1}, \ell_{j2}, \ell_{j3}$.
3. Verbinde Variablen- und Klauselknoten mit denselben Labeln.
4. Setze $k = n + 2m$.

Ausgabe: (G, k)

- Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(m)$, Schritt 3: $\mathcal{O}(m)$, Schritt 4: $\mathcal{O}(1)$.
- $|\phi| = \mathcal{O}(n + m) = \mathcal{O}(m)$, d.h. die Laufzeit ist polynomiell in $|\phi|$.

Reduktion für $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$



$\phi \in$ 3SAT $\Rightarrow f(\phi) \in$ KNOTENÜBERDECKUNG

Sei $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in$ 3SAT

- Dann gibt es eine erfüllende Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
- In die Menge U werden die folgenden Knoten aufgenommen.
  - n Variablenknoten:
    Falls $x_i = 1$, ist Knoten mit Label x_i in U. Sonst Knoten mit $\neg x_i$.
  - $2m$ Klauselknoten:
    Für jede Klausel ist mindestens ein Knoten mit einem Variablenknoten aus U verbunden. Die *anderen beiden Knoten* sind in U.
- U ist eine $n + 2m$-Knotenüberdeckung:
  - Die Kanten zwischen Variablenknoten $x_i, \neg x_i$ sind überdeckt durch einen Variablenknoten.
  - Kanten zwischen Klauselknoten $\ell_{j1}, \ell_{j2}, \ell_{j3}$ sind überdeckt durch zwei Klauselknoten.
  - Kanten zwischen Variablen- und Klauselknoten sind überdeckt:
    Entweder der Variablenknoten überdeckt die Kante oder einer der beiden Klauselknoten.
- D.h. $f(\phi) = (G, n + 2m) \in$ KNOTENÜBERDECKUNG

Korrektheit: Rückrichtung

Sei $f(\phi) = (G, n + 2m) \in$ KNOTENÜBERDECKUNG:

- Dann gibt es eine $(n + 2m)$-Knotenüberdeckung U mit:
  - Mindestens ein Variablenknoten x_i oder $\neg x_i$ ist in U für alle i.
  - Mindestens 2 von 3 Klauselknoten $\ell_{j1}, \ell_{j2}, \ell_{j3}$ sind in U für alle j.
  - Da $|U| = n + 2m$:
    Jeweils *genau ein* Variablenknoten und *genau zwei* Klauselknoten.
- Sei B die Belegung, die die Variablenknoten aus U auf wahr setzt.
  - B ist eine konsistente Belegung.
  - Für alle Klauseln K_j mit Knoten $\ell_{j1}, \ell_{j2}, \ell_{j3}$ ist ein $\ell_{jk}, k \in [3]$ nicht in U.
  - Die Kante vom Klausel- zum Variablenknoten ℓ_{jk} wird überdeckt.
  - D.h. der Variablenknoten ℓ_{jk} ist in U. Damit erfüllt ℓ_{jk} die Klausel K_j.
- D.h. B ist eine erfüllende Belegung für ϕ.
- Damit gilt $\phi \in$ 3SAT.

Subset Sum

Definition Sprache SubsetSum

Sei $M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subset \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Sprache

$$\textsc{SubsetSum} := \{(M, t) \mid \exists S \subseteq M : \sum_{s \in S} s = t\}.$$

Satz

SUBSETSUM ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

1. SUBSETSUM $\in \mathcal{NP}$ (Übung)
2. 3SAT $\leqslant_p$ SUBSETSUM

Idee der Reduktion $f(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = (S, t)$: Konstruieren

- für jedes x_i Elemente $y_i, z_i \in S$ für $x_i = 1$ bzw. $x_i = 0$,
- für jede Klausel K_j Variablen $g_j, h_j \in S$ für nicht erfüllte Literale.
- Definieren Tabelle T mit Zeilen y_i, z_i, g_j, h_j und Zeile t. Die Spalten bestehen aus x_i und K_j für $i \in [n], j \in [m]$.
- Einträge in einer Zeile werden als Dezimaldarstellung interpretiert.

Konstruktion der Reduktion f

Algorithmus M_f

EINGABE: $\phi(x_1, \ldots, x_n) = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ mit $K_j = \ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3}$

1. Erstelle Tabelle T mit Spalten für $x_1, \ldots, x_n$ und $K_1, \ldots, K_m$.
2. Erstelle $2n$ Variablenzeilen für x_i, $i = 1, \ldots, n$:
   - y_i: Einsen in Spalte x_i. Für alle Spalten K_j: Anzahl Literale x_i in K_j.
   - z_i: Einsen in Spalte x_i. Für alle Spalten K_j: Anzahl Literale $\neg x_i$ in K_j.
3. Erstelle $2m$ Klauselzeilen für K_j, $j = 1, \ldots, m$:
   - g_j, h_j: Einsen jeweils in Spalte K_j.
4. Erstelle Zeile t: Einsen in Spalten x_i, Dreien in Spalten K_j.
5. Fülle mit Nullen. Definiere $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n, g_1, h_1, \ldots, g_m, h_m, t$ mittels des Dezimalwerts der betreffenden Zeile.

AUSGABE: (M, t) mit $M = \{y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n, g_1, h_1, \ldots, g_m, h_m\}$.

Laufzeit:

- Eingabelänge $|\phi| \geqslant \max\{m, n\} = \Omega(m + n)$
- $T(M_f) = \mathcal{O}((n + m)^2)$, d.h. polynomiell in der Eingabelänge.

Bsp für $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2)$

- Definieren Tabelle T

	x_1	x_2	K_1	K_2
y_1	1	0	1	0
z_1	1	0	0	1
y_2	0	1	2	1
z_2	0	1	0	1
g_1	0	0	1	0
h_1	0	0	1	0
g_2	0	0	0	1
h_2	0	0	0	1
t	1	1	3	3

- Setze $y_1 = 1010, z_1 = 1001, \ldots, t = 1133$.
- Belegung $x_1, x_2 = 1$ erfüllt alle Literale in K_1 und Literal x_2 in K_2.
- Zahlen y_1, y_2 summieren sich mit g_2, h_2 für K_2 zu t.

Korrektheit: $\phi \in 3SAT \Rightarrow f(\phi) \in$ SubsetSum

Sei $\phi \in 3SAT$

- Dann besitzt ϕ eine erfüllende Belegung B.
- Nimm y_i in S auf, falls $x_i = 1$ in B. Sonst nimm z_i in S auf.
- Betrachten $t' = \sum_{s \in S} s$:
  - B ist konsistente Belegung: Obere n Dezimalstellen von t' sind 1.
  - B ist erfüllend: Untere m Dezimalstellen $t_1, \ldots, t_m$ sind aus $\{1, 2, 3\}$.
- Falls $t_i = 1$, nimm g_i und h_i in S auf. Falls $t_i = 2$, nimm g_i in S auf.
- Damit gilt $\sum_{s \in S} s = t$.
- D.h. $f(\phi) = (M, t) \in$ SubsetSum

Korrektheit $f(\phi) \in$ SubsetSum $\Rightarrow \phi \in$ 3SAT

Sei $f(\phi) \in$ SubsetSum

- Dann gibt es $S \subseteq M$ mit $\sum_{s \in S} s = t$, wobei $t = 1 \ldots 13 \ldots 3$.
- Die oberen n Dezimalstellen von t sind 1.
  - Damit enthält S für jedes i genau eines der Elemente y_i, z_i.
  - Sei B die Belegung mit $x_1 = 1$ für $y_i \in S$ und $x_1 = 0$ für $z_i \in S$.
- Die unteren m Dezimalstellen $t_1, \ldots, t_m$ von t sind 3.
  - D.h. t_j kann nicht allein als Summe von g_j und h_j dargestellt werden.
  - Für jedes t_j kommt mindestens ein Beitrag aus eine Zeile y_i bzw. z_i.
  - D.h. das Literal x_i bzw. $\neg x_i$ erfüllt die Klausel K_j.
- Damit ist B eine erfüllende Belegung für ϕ.
- D.h. $\phi \in$ 3SAT.

Das Rucksackproblem

Definition Sprache Rucksack

Gegeben sind n Gegenstände mit Gewichten $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{N}$ und Profiten $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{N}$. Seien ferner $B, k \in \mathbb{N}$.

$$\text{RUCKSACK} := \{(W, P, B, k) \mid \exists I \subseteq [n] : \sum_{i \in I} w_i \leqslant B \text{ und } \sum_{i \in I} p_i \geqslant k.\}$$

Satz

RUCKSACK ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: zu zeigen

1. RUCKSACK $\in \mathcal{NP}$ (bereits gezeigt)
2. SUBSETSUM $\leqslant_p$ RUCKSACK

Reduktion $f(M, t) = (W, P, B, k)$

Algorithmus M_f

EINGABE: M, t

1. Setze $B \leftarrow t$ und $k \leftarrow t$.
2. For $i \leftarrow 1$ to n: Setze $w_i \leftarrow m_i$ und $p_i \leftarrow m_i$

AUSGABE: W, P, B, k

Laufzeit:

- Eingabelänge: $\log(t) + \sum_{i=1}^{n} \log(m_i)$
- Schritt 1: $\mathcal{O}(\log t)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{n} \log(m_i))$
- D.h. Gesamtlaufzeit ist polynomiell in der Eingabelänge.

$(M, t) \in$ SUBSETSUM $\Leftrightarrow f(M, t) \in$ RUCKSACK

Sei $(M, t) \in$ SUBSETSUM

- Dann gibt es eine Menge $I \subseteq [n]$ mit $\sum_{i \in I} m_i = t$.
- Damit gilt $\sum_{i \in I} m_i \leqslant t$ und $\sum_{i \in I} m_i \geqslant t$.
- Es folgt $\sum_{i \in I} w_i \leqslant B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geqslant t$.
- Damit gilt $f(M, t) = (W, P, B, k) \in$ RUCKSACK

Sei $(W, P, B, k) = f(M, t) \in$ RUCKSACK

- Dann gibt es eine Menge $I \subseteq [n]$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leqslant B$ und $\sum_{i \in I} p_i \geqslant k$.
- D.h. es gibt eine Menge $I \subseteq [n]$ mit $\sum_{i \in I} m_i \leqslant t$ und $\sum_{i \in I} m_i \geqslant t$.
- Setze $S = \sum_{i \in I} m_i$. Dann gilt $S \subseteq M$ und $\sum_{s \in S} s = t$.
- Damit ist $(M, t) \in$ SUBSETSUM

Exakte Überdeckung

Definition Exakte Überdeckung

Sei $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $F = \{S_1, \ldots, S_m\} \subseteq \mathcal{P}(U)$, d.h. $S_i \subseteq U$.
Eine Menge $C \subseteq F$ heißt *exakte Überdeckung* von U falls

1. $\bigcup_{S_i \in C} S_i = U$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ für alle $S_i, S_j \in C$ mit $i \neq j$.

$$\text{COVER} := \{(U, F) \mid F \text{ enthält eine exakte Überdeckung von } U.\}$$

Bsp:

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, F = \{\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}, \{1\}\}$
- $C = \{\{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1\}\}$ ist eine exakte Überdeckung von U.
- F ist *keine* exakte Überdeckung von U.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit der exakten Überdeckung

Satz

COVER ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Zeigen

1. COVER $\in \mathcal{NP}$ (Übung)
2. 3SAT $\leqslant_p$ COVER

Idee der Reduktion

- U enthält alle Variablen x_i, Klauseln K_j und Literale ℓ_{jk}.
- F enthält geeignete Mengen für Variablen, Klauseln und Literale.

Reduktion $f(\phi) = (U, F)$

Algorithmus M_f

EINGABE: $\phi(x_1, \ldots, x_n) = K_1 \wedge \ldots K_m$ mit $K_j = \ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3}$

1. Setze $U = \{x_1, \ldots, x_n, K_1, \ldots, K_m, \ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{13}, \ldots, \ell_{m1}, \ell_{m2}, \ell_{m3}\}$.
2. Definition von F als Vereinigung der Mengen
   - Variablen: $V_{0i} = \{x_i\} \cup \{\ell_{jk} \mid \ell_{jk} = x_i\}$ und
     $V_{1i} = \{x_i\} \cup \{\ell_{jk} \mid \ell_{jk} = \neg x_i\}$ für alle i, j, k.
   - Klauseln: $K_{jk} = \{K_j, \ell_{jk}\}$ für alle $j \in [m], k \in [3]$.
   - Literale: $L_{jk} = \{\ell_{jk}\}$ für alle $j \in [m], k \in [3]$.

AUSGABE: U, F

Laufzeit:

- Eingabelänge von ϕ ist $|\phi| = \Omega(m + n)$
- Schritt 1: $\mathcal{O}(n + m + |\phi|)$
- Schritt 2: Variablen $\mathcal{O}(n + |\phi|)$, Klauseln $\mathcal{O}(m)$, Literale $\mathcal{O}(|\phi|)$.
- D.h. die Laufzeit ist linear in der Eingabelänge.

Bsp.: $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

- $U = \{x_1, x_2, x_3, K_1, K_2, \ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{21}, \ell_{22}, \ell_{23}\}$
- V_{0i} : $T_{01} = \{x_1, \ell_{11}\}$, $T_{02} = \{x_2, \ell_{12}, \ell_{22}\}$, $T_{30} = \{x_3, \ell_{33}\}$
- V_{1i} : $T_{11} = \{x_1, \ell_{21}\}$, $T_{21} = \{x_2\}$, $T_{31} = \{x_3, \ell_{13}\}$
- K_{1k} : $K_{11} = \{K_1, \ell_{11}\}$, $K_{12} = \{K_1, \ell_{12}\}$, $K_{13} = \{K_1, \ell_{13}\}$
- K_{2k} : $K_{21} = \{K_2, \ell_{21}\}$, $K_{22} = \{K_2, \ell_{22}\}$, $K_{23} = \{K_2, \ell_{23}\}$
- L_{1k} : $L_{11} = \{\ell_{11}\}$, $L_{12} = \{\ell_{12}\}$, $L_{13} = \{\ell_{13}\}$
- L_{2k} : $L_{21} = \{\ell_{21}\}$, $L_{22} = \{\ell_{22}\}$, $L_{23} = \{\ell_{23}\}$
- Erfüllende Belegung von ϕ: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Korrektheit: $\phi \in 3SAT \Rightarrow f(\phi) = (U, F) \in$ COVER

Sei $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in 3SAT$

- Dann gibt es eine erfüllende Belegung B der Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
- B setzt in jeder Klausel K_j mindestens ein Literal ℓ_{jk} auf wahr.
- Definiere Menge $C \subseteq F$ mittels B:
  - Variablen: Falls $x_i = 0$, nimm V_{0i} in C auf. Sonst V_{1i}.
  - Klauseln: Nimm Menge K_{jk}, die ℓ_{jk} enthält, in C auf.
  - Literale: Für alle nicht von C abgedeckten ℓ'_{jk}, nimm L'_{jk} in C auf.
- C ist eine exakte Überdeckung, denn
  - Variablen x_i: Werden durch V_{0i}, V_{1i} abgedeckt.
  - Klauseln K_j: Werden durch K_{jk} abgedeckt.
    Die paarweisen Schnitte der Mengen V_{0i}, V_{1i}, K_{jk} sind *leer*.
  - Literale ℓ'_{jk}: Werden durch L'_{jk} abgedeckt.
- Damit ist $(U, F) \in$ COVER

Korrektheit: $f(\phi) = (U, F) \in$ COVER $\Rightarrow \phi \in$ 3SAT

Sei $f(\phi) = (U, F) \in$ COVER

- Dann gibt es eine Menge $C \subseteq F$ mit
  - Die Vereinigung der Mengen in C deckt U ab.
  - Der paarweise Schnitt von Mengen in C ist leer.
- Damit gilt für C
  - Variablen x_i: Entweder ist V_{0i} oder V_{1i} in C.
  - Klauseln K_j: Genau eine Klauselmenge K_{jk} ist in C.
- Definieren Variablen in B: $x_i = 0$ falls $V_{0i} \in C$, sonst $x_i = 1$.
  - Die von den V_{0i}, V_{1i} abgedeckten Literale sind auf falsch gesetzt.
  - Jede Klauselmenge K_{jk} muss ein wahres Literal ℓ_{jk} enthalten.
- D.h. B ist eine erfüllende Belegung.
- Damit gilt $\phi \in$ 3SAT.

Hamiltonscher Kreis

Definition Hamiltonscher Kreis

Sei G ein Graph. Ein Kreis in G, der jeden Knoten genau einmal enthält, heißt *Hamiltonscher Kreis*.
Für gerichtete Graphen definieren wir die Sprache

$$\text{GH-KREIS} := \{G \mid G \text{ gerichtet, } G \text{ besitzt einen Hamiltonschen Kreis.}\}$$

Für ungerichtete Graphen definieren wir analog

$$\text{UH-KREIS} := \{G \mid G \text{ ungerichtet, } G \text{ besitzt Hamiltonschen Kreis.}\}$$

Satz

GH-KREIS ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

- Beweis kann mittels COVER $\leqslant_p$ GH-KREIS geführt werden.
- Wir verzichten hier auf den nicht-trivialen Beweis.

NP-Vollständigkeit von Hamiltonkreis

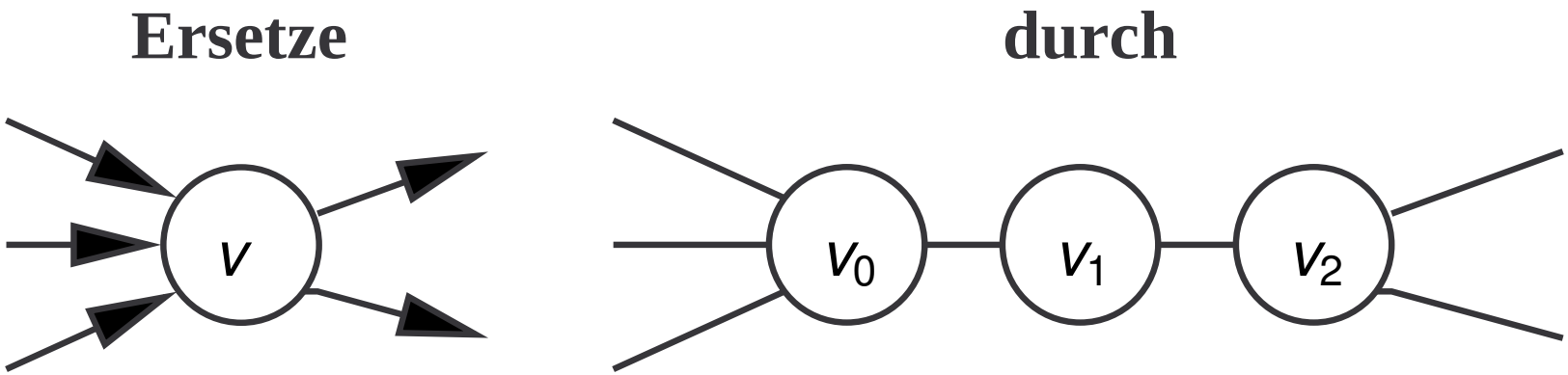
Satz

UH-KREIS ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Zeigen

1. UH-KREIS $\in \mathcal{NP}$ (Übung)
2. GH-KREIS $\leqslant_p$ UH-KREIS

Idee der Reduktion f:



Reduktion $f(G) = G'$

Algorithmus M_f

EINGABE: $G = (V, E)$ gerichteter Graph mit $V = [n], E = [m]$

1. Konstruktion der Knotenmenge V':
   - Ersetze alle $v \in V$ durch v_0, v_1, v_2
2. Konstruktion der Kantenmenge E':
   - $E' = \{\{u_2, v_0\} \mid (u, v) \in E\} \cup \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\} \mid v \in V\}$.

AUSGABE: $G' = (V', E')$ ungerichteter Graph

Laufzeit:

- Eingabelänge $|G| = \Omega(n + m)$
- Schritt 1: $\mathcal{O}(n)$, Schritt 2: $\mathcal{O}(n + m)$
- D.h. die Gesamtlaufzeit ist linear in der Eingabelänge.

Korrektheit: $G \in$ GH-KREIS $\Leftrightarrow f(G) = G' \in$ UH-KREIS

Sei $G \in$ GH-KREIS

- Dann existiert eine Permutation $\pi : [n] \to [n]$, so dass G einen Hamiltonschen Kreis $H = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n), \pi(1))$ enthält.
- G' enthält den Hamiltonschen Kreis $H' = (\pi(1)_0, \pi(1)_1, \pi(1)_2, \ldots, \pi(n)_0, \pi(n)_1, \pi(n)_2, \pi(1)_0)$.
- Damit ist $G' \in$ UH-KREIS

Sei $G' \in$ UH-KREIS

- G' enthält einen Hamiltonschen Kreis H'.
  - H' muss für alle $v \in V'$ die Kanten $\{v_0, v_1\}$ und $\{v_1, v_2\}$ enthalten, sonst könnte v_1 nicht in H' sein.
  - H' ist oBdA von der Form $(\pi(1)_0, \pi(1)_1, \pi(1)_2, \ldots, \pi(n)_0, \pi(n)_1, \pi(n)_2, \pi(1)_0)$.
- G besitzt Hamiltonschen Kreis $H = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n), \pi(1))$.
- Damit ist $G \in$ GH-KREIS

Übersicht unserer $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme

- SAT
- 3SAT
- CLIQUE
- KNOTENÜBERDECKUNG
- SUBSETSUM
- RUCKSACK
- COVER
- GH-KREIS
- UH-KREIS