

Hausübungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik II

SoSe 2010

Blatt 2 / 04. Mai 2010 / Abgabe bis spätestens 18. Mai 2010, 10:00 Uhr

AUFGABE 14 (4 Punkte):

Gegeben sei eine binäre Quelle Q mit $P = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$.

- (i) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der Symbole in Q^3 an.
- (ii) Bestimmen Sie eine Huffman-Codierung $\mathcal{C}$ von Q^3
- (iii) Bestimmen Sie die durchschnittliche Codewortlänge von $\mathcal{C}$ und auch die entsprechende durchschnittliche Codewortlänge pro Quellsymbol aus Q .

AUFGABE 15 (5 Punkte):

Geben sie alle Quellwahrscheinlichkeiten $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ mit $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5$ an, die $\{00, 01, 10, 110, 111\}$ als Huffman-Code liefern.

AUFGABE 16 (6 Punkte):

Gegeben sei eine Quelle Q über dem Alphabet $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_1, \dots, p_n$ mit $p_1 \geq \dots \geq p_n$.

Zeigen Sie, dass für jede Huffman-Kodierung C gilt:

- (a) Falls $p_1 < \frac{1}{3}$, dann ist $|C(a_i)| \geq 2$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- (b) Falls $p_1 > \frac{2}{5}$, dann ist $|C(a_1)| = 1$.

AUFGABE 17 (4 Punkte):

Wir betrachten im Folgenden die Beziehung zwischen der Entropie einer Zufallsvariablen X und der Entropie einer Funktion der Zufallsvariablen $f(X)$.

- (a) Die Zufallsvariable X nehme die Werte $1, 2, \dots, 36$ jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an. Wie groß ist die Entropie $H(X)$?
- (b) Betrachten Sie nun die Funktion $g(X) = X^{36} \pmod{37}$. Was ist die Entropie $H(g(X))$?
- (c) Zeigen Sie, dass allgemein gilt

$$H(f(X)) \leq H(X).$$

Wann gilt Gleichheit?