

26. August 2009

**Klausur**  
**Diskrete Mathematik II**  
**SS 2009**

Matrikelnummer: .....

Name, Vorname: .....

Studiengang: .....Diplom  Bachelor  Master

Prüfungsordnung: .....

**Bitte beachten Sie ebenfalls die Hinweise auf der zweiten Seite! VIEL ERFOLG.**

Unterschrift: .....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\Sigma$
Punkte maximal	15	15	16	12	10	14	18	100
Punkte erreicht								

Klausur  Bonus  **Gesamtnote**

## Hinweise:

### Aufgabenblätter

- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus.
- Prüfen Sie, ob die Klausur **7 Aufgaben** enthält.
- Kennzeichnen Sie alle verwendeten Blätter zuerst mit Name und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie weder Rotstift noch Bleistift.
- Halten Sie Ihren Studenausweis bereit.
- Geben Sie Begründungen, Zwischenergebnisse und verwendete Formeln an.

### Bewertung

- Ein nicht vorhandener Lösungsweg oder Unleserlichkeit führen zu Punktabzug.
- Die Gesamtnote ergibt sich aus der Klausurnote und dem in den Hausübungen erzielten Bonus.

### Dauer der Klausur und zugelassene Hilfsmittel

- Ihnen stehen **120 Minuten** zum Bearbeiten der Aufgaben zur Verfügung.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zwei handbeschriebene DIN A4 Blätter.
- Elektronische Geräte (Handys, PDAs, Laptops, programmierbare Taschenrechner) bitte der Klausuraufsicht zur Verwahrung geben.
- Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist, können zusätzlich ein zweisprachiges Wörterbuch verwenden.

Name: ..... Matrikelnummer: .....

**Aufgabe 1 (15 Punkte)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Eine Begründung ist **nicht** erforderlich. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 3 Punkte. Jede falsche Antwort führt zu 3 Punkten Abzug. Insgesamt können Sie bei dieser Aufgabe nicht weniger als 0 Punkte erreichen.

(1) Es gilt  $A(6, 4) = 4$ .

- JA**
- NEIN**

(2)  $C = \{100, 001, 101\}$  ist ein linearer Code.

- JA**
- NEIN**

(3) Sei  $L$  eine rekursiv aufzählbare Sprache. Dann ist auch die komplementäre Sprache  $\bar{L}$  rekursiv aufzählbar.

- JA**
- NEIN**

(4) Sei  $L_1$   $\mathcal{NP}$ -vollständig. Wann folgt, dass auch  $L_2$   $\mathcal{NP}$ -vollständig ist?

- $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_1 \in \mathcal{NP}$
- $L_2 \leq_p L_1$  und  $L_1 \in \mathcal{NP}$
- $L_1 \leq_p L_2$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$
- $L_2 \leq_p L_1$  und  $L_2 \in \mathcal{NP}$

(5) Jeder maximale Code ist perfekt.

- JA**
- NEIN**

Name:..... Matrikelnummer:.....

**Aufgabe 2 (4+4+4+3 Punkte)**

Sei  $C = \langle 1010, 0101 \rangle$ .

- (a) Geben Sie eine Parity Check Matrix für  $C^\perp$  und ihre Herleitung an.
- (b) Geben Sie eine Parity Check Matrix für  $C$  und ihre Herleitung an.
- (c) Geben Sie die Parameter von  $C^\perp$  an.
- (d) Ist  $1111 \in C^\perp$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name:..... Matrikelnummer:.....

**Aufgabe 3 (4+8+4 Punkte)**

Es sei  $X$  eine erinnerungslose Quelle über dem Alphabet  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  mit Quellwahrscheinlichkeiten

$$W_s[X = a_1] = \frac{3}{5}, W_s[X = a_2] = W_s[X = a_3] = \frac{1}{5}.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Huffman-Codierung  $C_1$  für die Quelle  $X$ .
- (b) Geben Sie eine Huffman-Codierung  $C_2$  für die zweite Quellerweiterung  $X^2$  an.
- (c) Berechnen Sie die erwarteten Codewortlängen  $E(C_1)$  und  $E(C_2)$  und vergleichen Sie diese.

Name:..... Matrikelnummer:.....

**Aufgabe 4 (4+8 Punkte)**

Ein ternärer Code mit Basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\} \subseteq \mathbb{F}_3^n$  besteht aus allen Vektoren  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{b}_i \in \mathbb{F}_3^n$  mit  $a_i \in \mathbb{F}_3$ .

Gegeben sei ein ternärer Code  $C$  mit Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie alle Codewörter des Codes  $C$  an.
- (b) Bestimmen Sie ein Standardarray des Codes  $C$  und dekodieren Sie damit die Wörter 111 und 222.

Name:..... Matrikelnummer:.....

**Aufgabe 5 (3+2+5 Punkte)**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für binäre Codes:

(a)  $A(n, d) \leq 2^n$  für alle  $1 \leq d \leq n$

(b)  $A(n, 1) = 2^n$

(c)  $A(n, n) = 2$

Name:..... Matrikelnummer:.....

**Aufgabe 6 (14 Punkte)**

Zeigen Sie, dass HALF-CLIQUE in  $\mathcal{NP}$  liegt, das heißt, geben Sie einen polynomialen Verifizierer oder eine NTM für HALF-CLIQUE an und zeigen Sie die Korrektheit und Laufzeit.

Zur Erinnerung:

Eine  $k$ -Clique in  $G$  ist ein vollständig verbundener Teilgraph von  $G$  mit  $k$  Knoten und

$$\text{HALF-CLIQUE} = \{G \mid G = (V, E) \text{ besitzt eine } \binom{|V|}{2} \text{-Clique}\}$$



Name:..... Matrikelnummer:.....

**Aufgabe 7 (18 Punkte)**

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph. Ein Hamiltonscher Pfad in  $G$  ist ein einfacher Pfad der Länge  $|V| - 1$ . Seien

$$\text{HAMILTON} = \left\{ G \mid G \text{ besitzt einen Hamiltonschen Pfad} \right\}$$

und

$$\text{LÄNGSTERPFAD} = \left\{ (G_L, s, t, k) \mid \begin{array}{l} G_L \text{ besitzt einen einfachen Pfad von} \\ s \text{ nach } t \text{ der Länge mindestens } k \end{array} \right\}.$$

Zeigen Sie  $\text{HAMILTON} \leq_p \text{LÄNGSTERPFAD}$ .

Hinweis: Fügen Sie zu  $G$  zwei Knoten geeignet hinzu.

Name:..... Matrikelnummer:.....