**Hausübungen zur Vorlesung
Quantenalgorithmen
WS 2011/2012**

Blatt 2 / 31. Oktober 2011
Abgabe bis 14. November 2011, 14 Uhr (vor der Übung)

AUFGABE 1 (4 Punkte):

Seien $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zwei unitäre Matrizen. Beweisen Sie, dass auch $A \otimes B$ eine unitäre Matrix ist.

AUFGABE 2 (5 Punkte):

Sei $H_n := \bigotimes_{i=1}^n W_2$ und $y \in \{0, 1\}^n$. Zeigen Sie, dass

$$H_n |y\rangle = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot y} |x\rangle,$$

wobei $x \cdot y$ das Skalarprodukt von x und y ist.

AUFGABE 3 (5 Punkte):

Gegeben seien

$$\begin{aligned} |\beta_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \\ |\beta_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \\ |\beta_{10}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle), \\ |\beta_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$ eine orthonormale Basis bildet (die sogenannte Bell Basis).

b) Zeigen Sie folgende Identität für $|z\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$.

$$|z\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle = \frac{1}{2} |\beta_{00}\rangle \otimes |z\rangle + \frac{1}{2} |\beta_{01}\rangle \otimes (M_1 |z\rangle) + \frac{1}{2} |\beta_{10}\rangle \otimes (F |z\rangle) + \frac{1}{2} |\beta_{11}\rangle \otimes (M_1 F |z\rangle)$$

Dabei bezeichnet $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ das Quanten Not und $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ den Flip.

c) Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Quanten Teleportation, in dem Alice lediglich in der Bell Basis misst.

AUFGABE 4 (7 Punkte):

Alice, Bob und Charlie teilen sich den folgenden 3-Qubit Zustand

$$\frac{1}{2}(|000\rangle - |110\rangle - |011\rangle - |101\rangle),$$

wobei Alice das 1. Qubit gehört, Bob das 2. und Charlie das 3. Qubit. Weiterhin hat jeder ein klassisches Bit b_A, b_B, b_C , so dass gilt $b_A \oplus b_B \oplus b_C = 0$.

Ziel von Alice, Bob und Charlie ist die Ausgabe von Bits a, b, c mit der Eigenschaft

$$b_A \vee b_B \vee b_C = a \oplus b \oplus c. \tag{1}$$

Dazu führen sie folgendes Protokoll durch:

- Jeder Teilnehmer dessen klassisches Bit Eins ist, führt W_2 auf seinem Qubit aus.
- Jeder misst sein Qubit und gibt das Ergebnis aus.

(a) Zeigen Sie, dass das Protokoll korrekt ist, d.h. dass Gleichung (1) erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass es keinen deterministischen Algorithmus gibt, der das Problem löst.