Kettenbruchalgorithmus

Algorithmus Kettenbruch

EINGABE: $x \in \mathbb{R}$

1. Berechne $a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ und $t_0 := x - a_0 \in [0,1[$. Setze $n = 0$.
2. Solange $t_n \neq 0$
   1. Berechne
      $$r_n := \frac{1}{t_n} > 1,\ a_{n+1} := \lfloor r_n \rfloor \in \mathbb{N} \text{ und } t_{n+1} := r_n - a_{n+1} \in [0,1[.$$
   2. Setze $n := n + 1$.

AUSGABE: $x = [a_0, \ldots, a_n]$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{N}$.

Bsp: Kettenbruch für $\frac{43}{30}$:

i	a_i	t_i	r_i
0	1	$\frac{13}{30}$	$\frac{30}{13}$
1	2	$\frac{4}{13}$	$\frac{13}{4}$
2	3	$\frac{1}{4}$	4
3	4	0	–

Korrektheit von KETTENBRUCH

Satz Korrektheit von KETTENBRUCH

Bei Terminierung liefert KETTENBRUCH bei Eingabe $x \in \mathbb{R}$ Ausgabe

$$x = [a_0, \ldots, a_n] \text{ mit } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ und } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

- Wir beweisen die Invariante $x = [a_0, \ldots, a_n, r_n]$ per Induktion.
- **IA** für $n = 0$: Es gilt $x = [x] = [a_0 + t_0] = [a_0 + \frac{1}{r_0}] = [a_0, r_0]$.
- **IS** $n \to n + 1$: Es gilt

$$\begin{aligned}[x] &\overset{IV}{=} [a_0, \ldots, a_n, r_n] = [a_0, \ldots, a_n, a_{n+1} + t_{n+1}] \\ &= [a_0, \ldots, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{r_{n+1}}] = [a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}, r_{n+1}].\end{aligned}$$

Terminierung von KETTENBRUCH

Satz Terminierung von KETTENBRUCH

Algorithmus KETTENBRUCH terminiert gdw $x \in \mathbb{Q}$.
Für $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ benötigt KETTENBRUCH Zeit $\mathcal{O}(\log^3(\max\{|p|, q\}))$.

Beweis:

$\Rightarrow$: Falls KETTENBRUCH mit $x = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ terminiert, so können wir x zu einem Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ umformen.

$\Leftarrow$: Sei $x = \frac{p}{q} =: \frac{b_0}{b_1}$.

- Wir zeigen, dass KETTENBRUCH dieselbe Rekursion durchführt wie der Euklidische Algorithmus (EA) bei Eingabe b_0, b_1.
- EA führt die Rekursion $b_i = q_i b_{i+1} + b_{i+2}$ mit $q_i = \lfloor \frac{b_i}{b_{i+1}} \rfloor$ durch.
- KETTENBRUCH berechnet die Rekursion $t_i = \frac{1}{t_{i-1}} - a_i$.
- Für $t_i := \frac{b_{i+2}}{b_{i+1}}$ und $a_i = q_i$ folgt

$$t_i = \frac{1}{t_{i-1}} - a_i \Leftrightarrow \frac{b_{i+2}}{b_{i+1}} = \frac{b_i}{b_{i+1}} - q_i \Leftrightarrow b_i = q_i b_{i+1} + b_{i+2}.$$

Terminierung von KETTENBRUCH

Beweis: (Fortsetzung)

- Wir müssen noch zeigen, dass beide Rekursionen dieselben Startwerte besitzen. Es gilt $a_0 = \lfloor x \rfloor = \lfloor \frac{b_0}{b_1} \rfloor = q_0$ und
$$a_1 = \lfloor r_0 \rfloor = \lfloor \frac{1}{x-a_0} \rfloor = \lfloor \frac{1}{\frac{b_0}{b_1} - \frac{b_0-b_2}{b_1}} \rfloor = \lfloor \frac{b_1}{b_2} \rfloor = q_1.$$
- Ferner gilt $t_0 = x - a_0 = \frac{b_0}{b_1} - \lfloor \frac{b_0}{b_1} \rfloor = \frac{b_0}{b_1} - q_0 = \frac{b_0}{b_1} - \frac{b_0-b_2}{b_1} = \frac{b_2}{b_1}$ und
$$t_1 = \frac{1}{t_0} + a_1 = \frac{b_1}{b_2} - q_1 = \frac{b_1}{b_2} - \frac{b_1-b_3}{b_2} = \frac{b_3}{b_2}.$$
- EA bricht nach $\mathcal{O}(\log(\max\{|p|, q\}))$ Iterationen für ein $b_k = 0$ ab.
- Damit ist $t_{k-2} = 0$ und KETTENBRUCH terminiert.
- D.h. auch KETTENBRUCH benötigt $\mathcal{O}(\log(\max\{|p|, q\}))$ Iterationen.
- KETTENBRUCH läuft damit insgesamt in Zeit $\mathcal{O}(\log^3(\max\{|p|, q\}))$.

Anmerkung: Kettenbrüche sind nicht eindeutig. Für $a_n > 1$ gilt
$[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1 + \frac{1}{1}] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$.
Übung: Zeigen Sie die Eindeutigkeit eines Kettenbrüche für x, wobei vorausgesetzt ist, dass das letzte Element größer als 1 ist.

Näherungsbrüche

Definition *n*-ter Näherungsbruch

Sei $x = [a_0, a_1, \ldots]$. Dann heißt $\frac{p_n}{q_n} := [a_0, \ldots, a_n]$ für $n \geq 0$ der *n-te Näherungsbruch* von x.

Ziel: Wir wollen zeigen, dass $[a_0, a_1, \ldots]$ stets konvergiert.

- Wir definieren $\begin{array}{lll} p_{-1} = 1 & p_{-2} = 0 & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_{-1} = 0 & q_{-2} = 1 & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{array}$
- Dann gilt $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = [a_0]$ und $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1]$.
- Wir können die Rekursion in Matrix-Schreibweise darstellen.
- Die Startwerte sind $\begin{pmatrix} p_{-1} & p_{-2} \\ q_{-1} & q_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Die Rekursionsgleichung können wir in folgender Form schreiben.
$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Damit können wir die Rekursion einfach auflösen zu
$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Näherungsbrüche

Lemma Näherungsbrüche

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle positiven $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} \text{ und } [a_0, a_1, \ldots, a_n, r] = \frac{rp_n + p_{n-1}}{rq_n + q_{n-1}}.$$

Beweis:

- Wir zeigen zunächst die zweite Gleichung per Induktion über n.
- **IA** für $n = 0$: $[a_0, r] = \frac{ra_0+1}{r} = a_0 + \frac{1}{r}$.
- **IS** für $n - 1 \to n$: Wir schreiben $[a_0, \ldots, a_n, r]$ als

$$[a_0, \ldots, a_n + \tfrac{1}{r}] \stackrel{IV}{=} \frac{(a_n + \frac{1}{r})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{r})q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + \frac{1}{r}p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{r}q_{n-1}} = \frac{rp_n + p_{n-1}}{rq_n + q_{n-1}}.$$

- Aus der 2. Gleichung erhalten wir

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, r] = \frac{rp_{n-1} + p_{n-2}}{rq_{n-1} + q_{n-2}} \text{ für alle } r \in \mathbb{R}.$$

- Einsetzen von $r = a_n$ liefert $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$.

Eigenschaften von Näherungsbrüchen

Lemma Eigenschaften von Näherungsbrüchen

Es gilt

1. $q_{n+1} > q_n \geq n$ für $n \in \mathbb{N}$.
2. $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
3. $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
4. $\mathrm{ggT}(p_n, q_n) = 1$.

Beweis:

(1) **IA** für $n = 1$: Es gilt $q_0 = 1$, $q_1 = a_1 \geq 1$ und damit

$$q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq q_1 + q_0 > q_1 \geq 1.$$

- **IS** $n \to n+1$: Es gilt

$$q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1} > q_n.$$

- Aus $q_n > \ldots > q_1 > 1$ folgt $q_n \geq n$.

(2) Wir schreiben $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$ als

$$\det \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \det \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \det \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}.$$

Eigenschaften von Näherungsbrüchen

Beweis: (Fortsetzung)

(3) Aus (2) folgt

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = a_n (-1)^n. \end{aligned}$$

(4) Sei $d = \mathrm{ggT}(p_n, q_n)$. Damit gilt $d | p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$.

- Aus (2) folgt $d | (-1)^{n+1}$ und damit $d = \pm 1$.