Wiederholung

Optimale Lösungen mit Greedy-Strategie erfordern

- Optimalität der Greedy-Wahl
  - unabhängig von Subproblemen
- Optimalität der Subprobleme

- Beispiele für optimale Greedy-Lösungen
  - Scheduling Problem
  - Maximierungsproblem Rationaler Rucksack
  - Minimal spannende Bäume (MST)

Minimale Spannbäume MST

Problem minimaler Spannbaum (MST=minimum spanning tree):

Gegeben:

- $G=(V,E)$, zusammenhängend, ungerichtet
- Gewichtsfunktion $w: E \to \mathbb{R}$

Gesucht :

- Spannbaum $T=(V,E_T)$ mit minimalem Gewicht $w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$.

Greedy-Strategie:

- Sortiere die Kanten aufsteigend nach Gewicht.
- Wähle nächste Kante, die keinen Kreis schließt.

Greedy-Algorithmus MST

Algorithmus Kruskal (MST)
Eingabe: G=(V,E), w: E $\rightarrow \mathbb{N}$

1. $E_T \leftarrow \emptyset$;
2. Sortiere die Kanten aufsteigend nach Gewicht.
3. For e $\in$ E in Reihenfolge aufsteigenden Gewichts
    1. If ((V, $E_T \cup \{e\}$) ist kreisfrei) then $E_T \leftarrow E_T \cup \{e\}$.

Ausgabe: MST T=(V, E_T).

Laufzeit: $\mathcal{O}(|E| \log|E|)$
Korrektheit:

- T ist Spannbaum.
- T hat minimales Gewicht: Zeigen im folgenden
    - T ist gewichtetes Matroid.
    - Greedy-Algorithmus ist optimal für alle gewichteten Matroide.

Definition Matroid

Def: M=(S,U) ist ein Matroid, falls

1. **$S \neq \emptyset$ ist endliche Menge.**

2. ***Vererbbarkeit*:**
   $U \subseteq \mathcal{P}(S)$, $U \neq \emptyset$ mit:
   $$A \in U \text{ und } B \subseteq A \Rightarrow B \in U.$$
   U nennt man die Menge der unabhängigen Teilmengen.

3. ***Ergänzungseigenschaft*:**
   $$A, B \in U \text{ und } |A| < |B| \Rightarrow \exists\, x \in B \setminus A\colon A \cup \{x\} \in U.$$

Beispiele für Matroide

Beispiele:

Uniformes Matroid vom Rang k

- S = endliche Menge
- $U = \{A \subseteq S \mid |A| \leq k\}$
  - 2. $A \in U, B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq S, |B| \leq |A| \leq k \Rightarrow B \in U$
  - 3. $A, B \in U$ mit $|A| < |B| \leq k \Rightarrow \exists \{x\} \in B \setminus A \Rightarrow |A \cup \{x\}| \leq k \Rightarrow A \in U$

Matrixmatroid

- S = Menge der Zeilenvektoren einer Matrix
  - 1. S ist endlich.
- U = Teilmengen von linear unabhängigen Zeilenvektoren
  - 2. Teilmengen linear unabh. Vektoren sind linear unabhängig.
  - 3. Seien $A, B \in U$ mit $|A| < |B|$.
    Es gibt in B einen Vektor, der linear unabhängig zu A ist.
    (Steinitzscher Austauschsatz, Basisergänzungssatz)

Kruskal‘s Algorithmus und Matroide

Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph.

- $S=E$
- $E_T \in U \Leftrightarrow (V,E_T)$ ist kreisfrei.

D.h. Kruskals Algorithmus berechnet ein Element $E_T \in U$.

Satz: $(S,U)=(E,E_T)$ ist ein Matroid, das sogenannte Kreismatroid.

1. $S=E$ ist endlich.
2. Entfernen von Kanten aus kreisfreien Graphen erzeugt keine Kreise.
3. Sei $A, B \in U$ mit $|A| < |B|$.
   - (V,A) hat $|V|-|A|$ ZHK, (V,B) hat $|V|-|B|$ ZHK (s. Vorlesung 06: Bäume)
   - (V,B) hat weniger Bäume als (V,A).
     $\Rightarrow$ B enthält Baum T mit Knoten in verschiedenen ZHK von (V,A).
   - T zusammenhängend: $\exists\ x=(u,v) \in T$: u,v in verschiedenen ZHK von A.
     $\Rightarrow (V, A \cup \{x\})$ ist kreisfrei.

Maximal unabhängige Mengen

Definitionen:

- Sei $A \in U$. $x \notin A$ ergänzt A, falls $A \cup \{x\} \in U$.
- A ist maximal unabhängig (oder auch: A ist Basis)
  $\Leftrightarrow$ A kann nicht ergänzt werden.

Satz: Alle Basen eines Matroids (S,U) haben gleiche Kardinalität.

Annahme: Seien A, B Basen mit $|A| < |B|$.

- Ergänzungseigenschaft: $\exists\, x \in B \setminus A$: $A \cup \{x\} \in U$.
- D.h. x ergänzt A. (Widerspruch: A ist maximal unabhängig.)

Beispiel Kreismatroid:

- Jede maximal unabhängige Menge E_T besitzt genau $|V|-1$ Kanten.
- Kreisfreier (V,E_T) mit $|E_T|=|V|-1$ ist Spannbaum (s. Vorlesung Bäume).

Greedy-Algorithmus für Matroide

Algorithmus Greedy-Matroid

Eingabe: Matroid M=(S, U), w: S $\rightarrow \mathbb{N}$

1. A $\leftarrow \emptyset$;
2. Sortiere S aufsteigend nach Gewicht.
3. For x $\in$ S in Reihenfolge aufsteigenden Gewichts
    1. If (A$\cup$\{x\}$\in$U) then A $\leftarrow$ A$\cup$\{x\} .

Ausgabe: Basis A $\in$ U mit minimalem Gewicht.

- Laufzeit: Sei n=|S| und f(n) die Laufzeit für den Test A$\cup$\{x\}$\in$U:
  $\mathcal{O}$(n logn + nf(n))

Optimalität der Greedy-Wahl

Sei $x \in S$ mit minimalem Gewicht, so dass $\{x\} \in U$.

- Falls kein solches x existiert, ist $A=\emptyset$ die einzige Basis.

Lemma: Es gibt eine Basis A minimalen Gewichts, die x enthält.

Annahme: Sei B Basis minimalen Gewichts w(B) mit $x \notin B$.

- Für alle $y \in B$ gilt:
  - $\{y\} \in U$ (Vererbbarkeit)
  - $w(y) \geq w(x)$ nach Wahl von x
- Konstruktion von A:
  - $A \leftarrow \{x\}$
  - while (|A| < |B|)
    - Ergänze A mit Element $b \in B$, so dass $A \cup \{b\} \in U$. (Ergänzungseigenschaft)
  - $w(A) = w(x) + w(B) – w(y) \leq w(B)$ für ein $y \in B$
  - Da w(B) minimal ist, gilt $w(B) \leq w(A)$ und damit w(A)=w(B).

Korrektheit von Schritt 3.

- Sei $x \in S$ mit minimalem Gewicht, so dass $\{x\} \in U$.
- x wird als erstes Element zu A hinzugefügt.

Frage: Kann $A=\{x\}$ mit Elementen mit Gewicht $< w(x)$ erweitert werden?

Lemma: Sei $M=(S,U)$ ein Matroid und $\{x\} \notin U$.
Dann gilt $A \cup \{x\} \notin U$ für alle $A \in U$.

Annahme: $A \cup \{x\} \in U$.

- Vererbbarkeit: $\{x\} \subseteq A \cup \{x\} \in U \Rightarrow \{x\} \in U$ (Widerspruch: $\{x\} \notin U$)

- D.h. jedes Element kann entweder gleich genutzt werden oder nie.
- Greedy-Matroid muss in Schritt 3 alle Elemente nur **einmal** betrachten:
  - Impliziert Korrektheit der For-Schleife in Schritt 3.

Optimalität der Subprobleme

Lemma: Sei x das erste von Greedy-Matroid ausgewählte Element. Dann muss eine minimale Basis des Matroids M‘=(S‘,U‘) gefunden werden, wobei

- **S‘ = {y $\in$ S | {x,y} $\in$ U}**
- **U‘ = {A $\subseteq$ S$\setminus${x} | A$\cup${x} $\in$ U}.**

- A ist Basis von M mit x $\in$ A $\Leftrightarrow$ A‘=A\{x} ist Basis von M‘
- Es gilt w(A) = w(A‘) + w(x).
- D.h. jede minimale Basis A für M liefert
  eine minimale Basis A‘ für M‘ und umgekehrt.

Zusammenfassen der Lemmata

Satz: Greedy-Matroid berechnet bei Eingabe M=(S,U) eine minimale Basis von M.

- Jedes Element y mit $\{y\} \notin U$ braucht nicht betrachtet werden.
- Sei w(x) minimal mit $\{x\} \in U$.
  - Falls kein solches x existiert, ist $A=\emptyset$ die einzige Basis.
- *Greedy-Wahl*: Es gibt eine optimale Lösung A mit $x \in A$.
- *Subproblem*: Finde optimale Lösung im Matroid M‘.

Korollar: Alg. Kruskal berechnet einen minimalen Spannbaum.

Minimierung versus Maximierung

Maximierungsproblem

- Gegeben: gewichtetes Matroid M=(S,U), w: S $\rightarrow \mathbb{N}$
- Gesucht: Basis von A mit maximalem Gewicht

1. Möglichkeit: Modifiziere Greedy-Matroid
    - Sortiere absteigend
    - Wähle greedy maximales Element, das A ergänzt.
2. Möglichkeit: Modizifiere Gewichtsfunktion w
    - Übungsaufgabe

Warnung: Es gibt zahlreiche Probleme
- die optimal mit Greedy gelöst werden können, aber
- von denen keine Matroiddarstellung bekannt ist.