# Wiederholung

**Formale Potenzreihen**

- Erzeugende Funktion $A(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Arithmetik auf Potenzreihen
  - Addition/Subtraktion
  - Multiplikation/Inverse
  - Shifts, Ableiten, etc.
  - Geschlossene Form für geometrische Reihe $\frac{1}{1-x}$
- Polyas Geldwechsel-Problem
- Strategie zum Lösen von Rekursionsgleichungen

# Lösen von Rekursionen

Rekursion: $a_n = a_{n-1} + 1$ für $n \geq 1$ und $a_0=1$.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_{n-1}+1)x^n \\ &= 1 + x \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} x^n \\ &= x \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n \\ &= x \cdot A(x) + \frac{1}{1-x} \qquad \Rightarrow A(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Wissen: $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$ für Folge $1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n$$

Koeffizientenvergleich: $a_n = n+1$ für alle $n \geq 0$.

# Allgemeine Strategie

1. Aufstellen der erzeugenden Fkt. $A(x)=\sum_{n \geq 0} a_n x^n$
2. Einsetzen von Anfangswerten und Rekursionsgleichung.
3. Stelle alle $a_n$ durch $A(x)$ dar.
4. Auflösen nach $A(x)$ liefert geschlossene Form $A(x)=f(x)$.
5. Formulierung von $f(x)$ als formale Potenzreihe
   - Hilfsmittel: Partialbruchzerlegung
6. Koeffizientenvergleich: Ablesen von geschlossener Form für $a_n$

# Ableiten von G(x)

- Geometrische Reihe $G(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$
- Ableiten liefert $$\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
- Erneutes Ableiten: $$\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$
- k-maliges Ableiten: $$\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$
$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$
- D.h. $$\frac{1}{(1-ax)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} a^n x^n$$

# Partialbruchzerlegung

**Satz: Seien f,g $\in \mathbb{R}[x]$ mit**

- **grad(g) < grad(f)**
- **f(x) = $(1-a_1x)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (1-a_rx)^{k_r}$.**

**Dann gibt es $g_i(x)$ mit grad($g_i$)<$k_i$ und**

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_1(x)}{(1-a_1x)^{k_1}} + \ldots + \frac{g_r(x)}{(1-a_rx)^{k_r}}.$$

- Multiplikation mit f(x):

$$g(x) = g_1(x) \prod_{i\neq 1} (1-a_ix)^{k_i} + \ldots + g_r(x) \prod_{i\neq r} (1-a_ix)^{k_i}$$

- grad($g_i$) < $k_i$, d.h. jeder Summand hat Grad kleiner als grad(f).
- Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich:
  - $k_i$ unbekannte Koeffizienten von $g_i$: $\sum_i k_i$ = grad(f) Unbekannte
  - grad(f) Koeffizienten: grad(f) viele Gleichungen

# Bsp. Partialbruchzerlegung

- g(x)=x, f(x) = (x^2-1). Liefert Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-1} &= \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}\\ \Rightarrow x &= a(x-1)+b(x+1)\\ \Rightarrow x &= (a+b)x-a+b\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\left|\begin{array}{rcl} a+b &=& 1\\ -a+b &=& 0\end{array}\right| \Rightarrow a=b=\frac{1}{2}.$$

D.h. $$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-x)}+\frac{1}{1-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}(G(-x)+G(x)).\end{aligned}$$

# Darstellung von f(x)

- Sei $f(x) = f_0 + f_1 x + f_n x^n$
- Ziel: Schreibe $f(x) = (1-a_1x)^{k_1} * \ldots * (1-a_rx)^{k_r}$

- Definieren reflektiertes Polynom
  - $f^R(x) = f_n + f_{n-1}x + \ldots + f_0x^n$
- Man beachte:
  - $f^R(x) = x^n * f^R(1/x)$

- Wichtiger Spezialfall: $f^R$ zerfalle in Linearfaktoren:
  - $f^R(x) = (x-a_1)*\ldots*(x-a_n)$

    $\Rightarrow f(x) = x^n*f^R(1/x) = x(1/x-a_1)*\ldots*x(1/x-a_n) = (1-a_1x)*\ldots*(1-a_nx)$

# Partialbruchzerlegung

- g(x) = x, f(x) = 1-x-$x^2$
- $f^R(x) = x^2-x-1$ hat die beiden Nullstellen

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1}, \text{d.h. } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- D.h. f(x) = (1 - $\phi$x)(1- $\phi$'x).
- Kettenbruchansatz:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-\phi x)(1-\phi' x)} &= \frac{a}{1-\phi x} + \frac{b}{1-\phi' x} \\ \Rightarrow x &= (1-\phi' x)a + (1-\phi x)b \end{aligned}$$

$$\text{D.h.} \left| \begin{array}{rcl} \phi' a + \phi b &=& (-1) \\ a + b &=& 0 \end{array} \right| \Rightarrow a = \frac{1}{\phi - \phi'} = \frac{1}{\sqrt{5}} = -b$$

# Zurück zu den Rekursionsgleichungen

Fibonacci-Zahlen: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_1=1$, $F_0=0$

1. Erzeugende Funktion: $F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n$
2. Rekursionsgleichung:
$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n\geq 2} F_n x^n = x + \sum_{n\geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= x + \sum_{n\geq 0} (F_{n+1} + F_n) x^{n+2} \end{aligned}$$
3. Darstellung der Summen durch F(x):
$$\begin{aligned} F(x) &= x + \sum_{n\geq 0} F_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n\geq 0} F_n x^{n+2} \\ &= x + x \sum_{n\geq 0} F_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n\geq 0} F_n x^n \\ &= x + x \sum_{n\geq 1} F_n x^n + x^2 F(x) \\ &= x + x(F(x) - F_0) + x^2 F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x) \end{aligned}$$

# Geschlossene Form für $F_n$

4. Auflösen nach F(x): $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$

5. Ersetzen durch formale Potenzreihe

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\phi x} + \frac{b}{1-\phi' x}$$
$$= a\sum_{n\geq 0}(\phi x)^n + b\sum_{n\geq 0}(\phi' x)^n \text{ mit } a = \frac{1}{\sqrt{5}} = -b$$

4. Koeffizientenvergleich $F_n$=[$x^n$] F(x):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi'^n)$$

# Anzahl Klammerungen

- Klammerung k der Länge m: $k=k_1 \ldots k_m \in \{ (, ) \}^m$
- Klammerung legal:
  - #öffnende Klammern in $k_1 \ldots k_i \geq$ #schließende Klammern in $k_1 \ldots k_i$
  - Für k gilt: #öffnende Klammern = #schließende Klammern

- $C_n$ = # legale Klammerungen mit n öffnenden Klammern
  - $C_0$ = 1: leeres Wort $\epsilon$
  - $C_1$ = 1: ()
  - $C_2$ = 2: ()(), (())
  - $C_3$ = 5

- Anwendung (Vorlesung 22):
  - #vollständig geklammerte Matrixprodukte mit n Matrizen = $C_{n-1}$

# Rekursive Definition von $C_n$

**Lemma: Für alle n $\geq$ 1 gilt**

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

$A_k$:= Menge der legalen Klammerungen mit

- Erste Klammer wird an Position 2k geschlossen

$$(\boxed{\quad A \quad})\boxed{\quad B \quad}$$

- A ist legale Klammerung mit k-1 öffnenden Klammern
- B ist legale Klammerung mit n-k öffnenden Klammern

$$\Rightarrow C_n = |\cup_{k=1}^{n} A_k| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| = \sum_{k=1}^{n} |A| * |B| = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

# Auflösen der Rekursionsgleichung

1. Erzeugende Funktion: $C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n$
2. Einsetzen Rekursionsgleichung:

$$C(x) \;=\; C_0 + \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}\right)x^n$$

3. Ersetzen der Summen durch $C(x)$:

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 + x\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}C_{n+1-k}\right)x^n \\ &= 1 + x\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right)x^n \\ &= 1 + xC(x)^2 \end{aligned}$$

# Geschlossene Form für $C_n$

4. Auflösen nach C(x): $C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$

Lösung mit "+" widerspricht für $x \to 0$ der Bedingung $C_0 = 1$.

5. Entwickeln von rechter Seite in Potenzreihe:

$$2xC(x) = 1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4k)^k$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n \geq 0} 2C_n x^{n+1} = - \sum_{k \geq 1} \binom{1/2}{k} (-4x)^k$$

$$\Rightarrow \quad C_n = -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n+1} (-4)^{n+1}.$$

Elementare Umformungen liefern $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.