# Wiederholung

**Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie**

- Wahrscheinlichkeitsraum
  - Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega]=1$.
- Berechnung von $\Pr[\cup^n_{i=1} A_i]$:
  - $A_i$ disjunkt: Additionssatz $\sum^n_{i=1} \Pr[A_i]$
  - $A_i$ nicht disjunkt: Inklusion/Exklusion
- Prinzip von Laplace: $\Pr[\omega]=1/|\Omega|$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Bedingte Wahrscheinlichkeit: $\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$
  - Zweikinderproblem
- Multiplikationssatz für $\Pr[\cap^n_{i=1} A_i]$:
  - $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] * \Pr[A_2|A_1] * \ldots * \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$.
  - Geburtstagsproblem

# Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

**Satz: Seien $A_1,\ldots,A_n \in \Omega$ paarweise disjunkt und $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann gilt**

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]$$

- $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n \Rightarrow B = (B \cap A_1) \ldots (B \cap A_n)$
- $A_i$, $A_j$ disjunkt für $i \neq j \Rightarrow (B \cap A_i), (B \cap A_j)$ disjunkt für $i \neq j$
- Additionssatz:

  $\Pr[B] = \Pr[B \cap A_1] + \ldots + \Pr[B \cap A_n]$

  $= \Pr[B]*\Pr[B|A_1] + \ldots + \Pr[B]*\Pr[B|A_n]$

**Korollar: $\Pr[B] = \Pr[B|A] * \Pr[A] + \Pr[B|\bar{A}] * \Pr[\bar{A}]$**

# Das Ziegenproblem

1. Kandidat K wählt aus einer von 3 Türen.
   - Hinter 2 Türen stehen Ziegen.
   - Hinter einer Tür steht ein Auto.
2. Showmaster macht Tür mit Ziege auf.
3. Kandidat K darf Tür wechseln. Soll er?

- Ereignis G:=„K gewinnt bei Türwechsel.“
  - Ziel: Bestimme Pr[G].
- Ereignis A:=„K wählt in 1. das Auto aus.“
  - Berechne Pr[G] abhängig von A und $\bar{A}$.

- Pr[G| A]=0 : K wechselt auf Ziege.
- Pr[G| $\bar{A}$]=1: K wechselt auf Auto.

- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:
  Pr[G] = Pr[G| A] * Pr[A] + Pr[G| $\bar{A}$] * Pr[ $\bar{A}$] = 0*1/3 + 1*2/3 = 2/3
- Damit gilt Pr[ $\bar{G}$]=1/3, K gewinnt
  - beim Türwechsel mit Ws 2/3
  - ohne Türwechsel mit Ws 1/3

# Satz von Bayes

**Satz: Seien $A_1,\ldots,A_n$ paarweise disjunkt und $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$, Pr[B]>0. Dann gilt für alle $i \in [n]$:**

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

- Folgt direkt aus Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

**Korollar: Sei Pr[B]>0. Dann gilt** $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[B|A] \cdot \Pr[A]}{Pr[B]}.$

- Satz von Bayes erlaubt „Umdrehen“ der Bedingung:
  - Anstatt $A_i$ unter der Bedingung B
  - betrachtet man B unter der Bedingung aller $A_j$

# Beispiel: Fehlerhafter Datenkanal

- $S_i$:=„Bit i wird gesendet.“ für i=0,1.
  - $Pr[S_0]=3/10$, $Pr[S_1]=7/10$.
- $R_i$:=„Bit i wird empfangen.“ für i=0,1.
  - Bit kippt: $Pr[R_1|S_0]=3/10$, $Pr[R_0|S_1]=1/10$

Fragen:

- Mit welcher Ws erhält man einen Übertragungsfehler?
  - $Pr[\text{„Übertragungsfehler“}] = Pr[S_0 \cap R_1] + Pr[S_1 \cap R_0]$
    $= Pr[R_1|S_0]*Pr[S_0] + Pr[R_0|S_1]*Pr[S_1] = 16/100$
- Mit welcher Ws wird eine Eins empfangen?
  - $Pr[R_1] = Pr[R_1|S_0]*Pr[S_0] + Pr[R_1|S_1]*Pr[S_1]$
    $= 3/10*3/10 + 9/10*7/10 = 72/100$
- Mit welcher Ws wurde 0 gesendet, wenn 0 empfangen wird?

$$Pr[S_0|R_0] = \frac{Pr[R_0|S_0] \cdot Pr[S_0]}{Pr[R_0]} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{28}{100}} = \frac{75}{100}.$$

# Unabhängigkeit von Ereignissen

- Zweimaliges Würfeln
- $\Omega=\{(i, j) \in [6]^2\}$
  - $\Pr[\omega] = 1/36$ für alle $\omega \in \Omega$.

- A:=„Augenzahl im ersten Wurf ist gerade.“
- B:=„Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade.“
- Frage: Wie groß ist Pr[B|A]?

- Intuitiv: Pr[B|A] = Pr[B]:
  - Das Ergebnis des ersten Wurfs beeinflusst den 2. Wurf nicht.
- Per Nachrechen:
  - B ∩ A = {(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)}

$$\Rightarrow \Pr[B|A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[A]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[B]$$

# Definition Unabhängigkeit

**Def: A,B heißen unabhängig, falls Pr[A∩B] = Pr[A] * Pr[B].**

- Für Pr[B]>0 gilt: $\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B].$
  - Eintreffen von B hat keinen Einfluss auf Eintreffen von A.

Beispiel letzte Folie:

- C = „Summe der Augenzahlen beträgt 7.“
  - Pr[C] = |{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}|/36 = 1/6.
- Frage: Sind A und C unabhängig?
  - A ∩ C = {(2,5),(4,3),(6,1)}
  - Pr[A ∩ C] = 3/36 = 1/12 = 1/2 * 1/6 = Pr[A] * Pr[C]
    ⇒ A und C sind unabhängig.

# Paarweise Unabh. versus Unabhängigkeit

Beispiel von zuvor:

- A und B unabhängig: $Pr[A \cap B] = Pr[A] * Pr[B]$
- A und C unabhängig: $Pr[A \cap C] = Pr[A] * Pr[C]$
- B und C analog zu A und C unabhängig: $Pr[B \cap C] = Pr[B] * Pr[C]$

Frage: Was ist mit $Pr[A \cap B \cap C]$?

- $A \cap B$: Beide Würfe sind gerade, d.h. die Summe ist gerade.
  $\Rightarrow Pr[A \cap B \cap C] = 0 \neq Pr[A \cap B] * Pr[C]$
- D.h. die Ereignisse $A \cap B$ und C sind abhängig.

# Unabhängigkeit beliebig vieler Ereignisse

**Def: $A_1,\ldots,A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $I \subseteq [n]$:**

$$\Pr[\cap_{i\in I} A_i] = \prod_{i\in I} \Pr[A_i]$$

**Lemma: $A_1,\ldots,A_n$ sind unabhängig $\Leftrightarrow \forall\, s \in \{0,1\}^n$:**

$$\Pr[A_1^{s1} \cap \ldots \cap A_n^{sn}] = \Pr[A_1^{s1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{sn}],$$

**mit** $A_i^0 = \bar{A}_i$ **und** $A_i^1 = A_i$**.**

**Korollar: Seien $A_1$, $A_2$ unabhängig. Dann sind $A_1$, $\bar{A}_2$ und $\bar{A}_1$, $A_2$ und $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ unabhängig.**

# Beweis des Lemmas

„⇒“: Induktion über Anzahl k der Nullen in $s=s_1,\ldots,s_n$

IA k=0, d.h. $s_1=\ldots=s_n=1$: $Pr[A_1 \cap \ldots A_n]=Pr[A_1]*\ldots*Pr[A_n]$

IS k-1 $\rightarrow$ k: s enthalte k Nullen, oBdA $s_1=0$.

$$
\begin{aligned}
& \Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
= \; & \Pr[A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
= \; & \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\
= \; & (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\
= \; & \Pr[\bar{A}_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}]
\end{aligned}
$$

# Rückrichtung

„⇐“: Sei I⊆[n].

$$
\begin{aligned}
\Pr[\cap_{i\in I} A_i] &= \sum_{s_j\in\{0,1\}, j\notin I} \Pr[(\cap_{i\in I} A_i) \cap (\cap_{j\notin I} A_j^{s_j})] \\
&= \sum_{s_j\in\{0,1\}, j\notin I} \prod_{i\in I} \Pr[A_i] \prod_{j\notin I} \Pr[A_j^{s_j}] \\
&= \prod_{i\in I} Pr[A_i] \cdot \sum_{j\notin I} \sum_{s_j\in\{0,1\}} \Pr[A_j^{s_j}] \\
&= \prod_{i\in I} Pr[A_i]
\end{aligned}
$$

# Schnitt, Vereinigung unabh. Ereignisse

**Lemma: Seien A, B, C unabhängig. Dann gilt:**

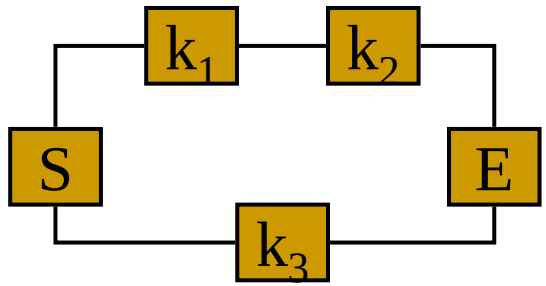
- **$A \cap B$, C sind unabhängig.**
- **$A \cup B$, C sind unabhängig.**

- Schnitt:
  $Pr[(A \cap B) \cap C] = Pr[A \cap B \cap C]$
  $= Pr[A]*Pr[B]*Pr[C] = Pr[A \cap B]*Pr[C]$

- Vereinigung:
  $Pr[(A \cup B) \cap C] = Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$
  $= Pr[A \cap C] + Pr[B \cap C] – Pr[A \cap B \cap C]$
  $= Pr[C] (Pr[A] + Pr[B] – Pr[A \cap B])$
  $= Pr[A \cup B] * Pr[C]$

# Bsp.: Rechnen mit unabh. Ereignissen

Szenario:




- Zwei Routen zwischen S und E
  - durch Knoten $k_1$ und $k_2$
  - durch Knoten $k_3$
- Ereignisse $K_i$ = „Knoten $k_i$ ist intakt.“ unabhängig mit $Pr[K_i]=p$.
  - Ereignis $R_1$:=„Route 1 verfügbar“, $Pr[R_1] = Pr[K_1 \cap K_2] = p^2$
  - Ereignis $R_2$:=„Route 2 verfügbar“, $Pr[R_2] = p$

Frage: Wie groß ist $Pr[R_1 \cup R_2]$? D.h. eine Route ist verfügbar.

$$\begin{aligned} Pr[R_1 \cup R_2] &= 1 - Pr[\neg(R_1 \cup R_2)] \\ &= 1 - Pr[\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2] \\ &= 1 - Pr[\bar{R}_1] \cdot Pr[\bar{R}_2] \\ &= 1 - (1-p^2)(1-p) = p + p^2 + p^3 \end{aligned}$$