Fragestunden & Übungsschein

Fragestunden angeboten von Nikolas List:

- Freitag den 22.2.
- Dienstag den 26.2.
- jeweils um 14h c.t. in NB 6/99

Falls Sie einen Übungsschein benötigen:

Bitte Email an mich mit

- Name
- Matrikelnummer
- Studienfach
- Modulbeschreibung
- etc

Wiederholung

- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
  - Ziegenproblem

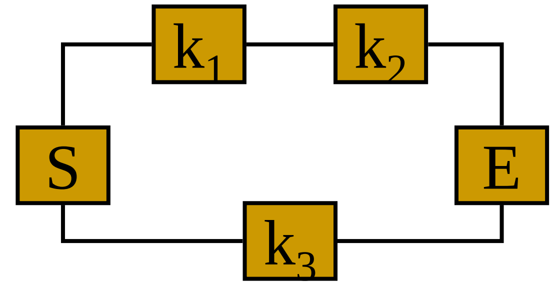
$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]$$

- Satz von Bayes

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[B|A] \cdot \Pr[A]}{Pr[B]}.$$

- Unabhängigkeit von Ereignissen:
  - Paarweise Unabhängigkeit: $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
  - Allgemeine Unabhängigkeit: $\Pr[\cap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$
  - Schnitt, Vereinigung: A, B, C unabhängig
    - A ∩ B, C unabhängig
    - A ∪ B, C unabhängig

Bsp.: Rechnen mit unabh. Ereignissen



Szenario:

- Zwei Routen zwischen S und E
  - durch Knoten k_1 und k_2
  - durch Knoten k_3
- Ereignisse K_i = „Knoten k_i ist intakt." unabhängig mit $Pr[K_i]=p$.
  - Ereignis R_1:=„Route 1 verfügbar", $Pr[R_1] = Pr[K_1 \cap K_2] = p^2$
  - Ereignis R_2:=„Route 2 verfügbar", $Pr[R_2] = p$

Frage: Wie groß ist $Pr[R_1 \cup R_2]$? D.h. eine Route ist verfügbar.

$$\begin{aligned}
\Pr[R_1 \cup R_2] &= 1 - \Pr[\overline{R_1 \cup R_2}] \\
&= 1 - \Pr[\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2] \\
&= 1 - \Pr[\bar{R}_1] \cdot \Pr[\bar{R}_2] \\
&= 1 - (1-p^2)(1-p) = p + p^2 + p^3
\end{aligned}$$

Zufallsvariable

Def: Eine Abbildung

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

heißt Zufallsvariable mit Wertebereich

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}.$$

Bsp.: Dreimaliger Münzwurf

- $\Omega = \{K,Z\}^3$
- $Y: \Omega \to \{0,1,2,3\}$ mit $Y(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ = #K in $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$

Dichte und Verteilung

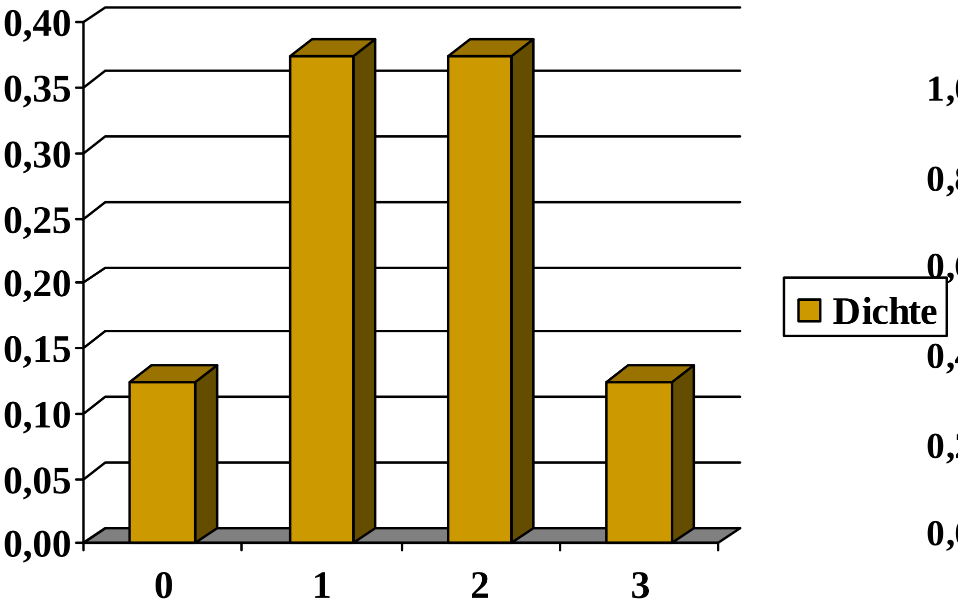
- Sei $W_X = \{x_1,\ldots,x_n\}$.
- Definieren Ereignis $A_i := X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$
- $\Pr[A_i]$:
  - Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x_i annimmt.
  - Schreibweise: $\Pr[X = x_i] := \Pr[A_i]$.
  - Weiterhin: $\Pr[X \leq x_i] := \sum_{x \in W_X, x \leq x_i} \Pr[X = x]$
  - Analog definiert man: $\Pr[X \geq x_i]$, $\Pr[2 \leq X \leq 3]$, $\Pr[X^2 > 1]$, etc.

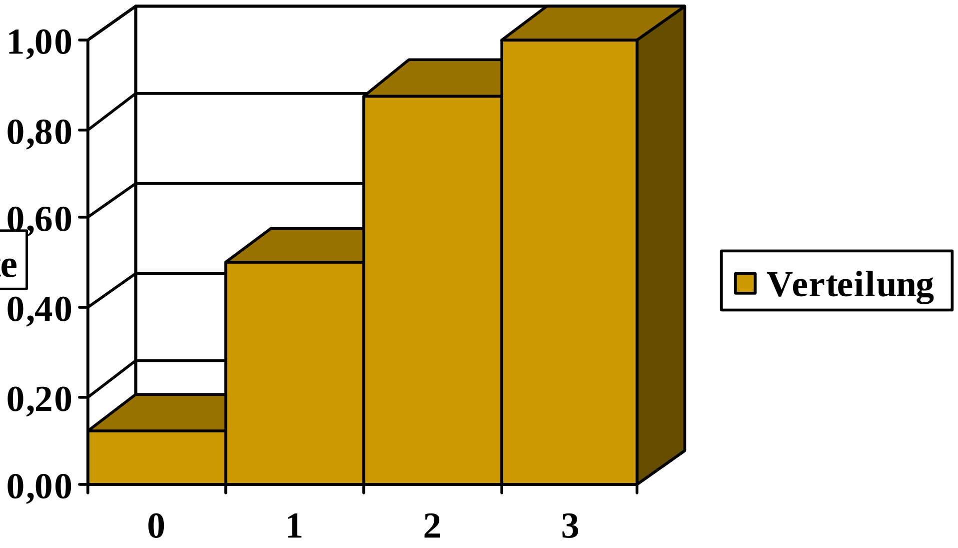
- Dichtefunktion f_X von X:
  - $f_X : \mathbb{R} \to [0,1],\ x \mapsto \Pr[X=x]$
  - Definiert Wahrscheinlichkeitsraum der Zufallsvariablen X.
- Verteilungsfunktion F_X von X:
  - $F_X: \mathbb{R} \to [0,1],\ x \mapsto \Pr[X \leq x]$

Bsp: Dichte und Verteilung

Bsp. Münzwurf von zuvor:

- Pr[Y=0] = Pr[ZZZ] = 1/8
- Pr[Y=1] = Pr[KZZ] + Pr[ZKZ] + Pr[ZZK] = 3/8
- Pr[Y=2] = Pr[ZKK] + Pr[KZK] + Pr[KKZ] = 3/8
- Pr[Y=3] = Pr[KKK] = 1/8





Erwartungswert

Def: Der Erwartungswert von X ist

$E[X] := \sum_{x \in W_X} x * Pr[X=x] = \sum_{x \in W_X} x * f_X(x)$,

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| * Pr[X=x]$ konvergiert.

Beispiel von zuvor:

$E[Y] = \sum_{i=0}^{3} i * Pr[X=i] = 0*1/8+1*3/8+2*3/8+3*1/8= 3/2$

Beispiel: Erwartungswert

Spielcasino:

- k Münzwürfe bis zum ersten Mal Kopf kommt.
  - k ungerade: Spieler zahlt an Bank k Euro.
  - k gerade: Bank zahlt an Spieler k Euro.

- Zufallsvariable G für Gewinn der Bank:
  - G(k) = k, falls k ungerade
  - G(k) = -k , falls k gerade
- Pr[Anzahl Würfe = k] = 2^{-k}.

$$
\begin{aligned}
E[G] &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot (\frac{1}{2})^k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (-\frac{1}{2})^{k-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

Man prüfe analog die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} k| \Pr[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (\frac{1}{2})^{k-1}$.

Erwartungswert muss nicht existieren

Modifikation des Spiels:

- Zufallsvariable G für Gewinn der Bank:
  - G(k) = 2^k,   falls k ungerade
  - G(k) = -2^k , falls k gerade

$$
\begin{aligned}
E[G] &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot 2^k \cdot (\frac{1}{2})^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}
\end{aligned}
$$

- E[G] nicht definiert, da die Summe nicht konvergiert.

Erwartete Anzahl von Würfen

Selbes Casino-Spiel wie zuvor.

- Münze zeigt Kopf mit Wahrscheinlichkeit p.

Frage: Wie oft wird die Münze im Erwartungswert geworfen?

- Definieren Zufallsvariable X:=„Anzahl Würfe“
  - $Pr[X=k] = (1-p)^{k-1} * p$

$$E[X] = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

Linearität des Erwartungswertes

Satz: Sei X eine Zufallsvariable und a,b $\in \mathbb{R}$. Dann gilt

E[a*X + b] = a*E[X] + b.

$$
\begin{aligned}
& E[a \cdot X + b] \\
&= \sum_{x \in W_X} (a \cdot x + b) \cdot \Pr[X = x] \\
&= a \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] + b \cdot \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \\
&= a \cdot E[X] + b
\end{aligned}
$$

Varianz

Def: Sei X eine Zufallsvariable mit μ=E[X]. Dann ist die Varianz von X

$\mathrm{Var}[X] := E[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x-\mu)^2 * \Pr[X=x]$.

$\mathrm{Var}[X]^{1/2}$ heißt Standardabweichung von X.

Satz: Es gilt $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] \\
&= E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2] \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - E[X]^2
\end{aligned}
$$

Sie haben das Ende von DiMa I erreicht.

Wie wär‘s mit DiMa II?