Diskrete Mathematik I

Alexander May

Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 08/09

Organisatorisches

- Vorlesung: **Di 10-12** in HNC 30 , **Mi 12-14** in HZO 50 (4+2 SWS, 9 CP)
- Übung: **Di 8-10** in HZO 60 und **Mi 8-10** in NA 02/99
- Klausur: Ende Februar

- Zusammensetzung des Auditoriums?

Übungsbetrieb

- Assistentin: **Maike Ritzenhofen**
- Korrektoren: **M. Mansour Al-Sawadi, A. Meurer**
- Übungsaufgaben werden korrigiert.
  Abgabe: Mo 14:00, 2 Kästen NA 02
- Aufgaben 1+2 und 3+4 separat in je einen Kasten.
- Gruppenabgaben bis 4 Personen
- Bonussystem:
  1 Notenstufe für 50%, 2 Notenstufe für 75%
  Gilt nur, falls man die Klausur besteht!
- Musterlösungen zu Übungsaufgaben
- Präsenzaufgaben ohne Musterlösungen!

Themen

Thematische Gebiete

- Kombinatorik: Abzählprobleme, Ziehen von Elementen
- Graphen: Traversierung, Matching, Planarität, Färbung
- Algebra: Modulare und Polynomarithmetik
- Komplexität: Algorithmik, Laufzeitanalyse
- Wahrscheinlichkeit: Diskrete Verteilungen

Was bedeutet diskret?

- Intuitiv: Alles, was man mit Computern exakt darstellen kann.
- Gegenteil von analog
- Probleminstanzen sind aus Menge mit endlicher Kardinalität

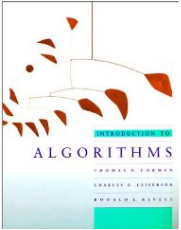
Literatur

Vorlesung richtet sich nach

- A. Steger, "Diskrete Strukturen, Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra", Springer Verlag
- T. Schickinger, A. Steger, "Band 2: Wahrscheinlichkeitstheorie"

Zusätzliche Literatur:

- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, “Introduction to Algorithmus”, MIT Press
- T. Ihringer, "Diskrete Mathematik", Teubner Verlag
- Aigner, "Diskrete Mathematik", Vieweg Studium, 2006



Notationen für Mengen

- $\mathbb{N}$: natürliche Zahlen ohne Null
- $\mathbb{N}_0$: natürliche Zahlen mit Null
- $\mathbb{Z}$: ganze Zahlen
- $\mathbb{Z}_n$: $\{0, 1, \ldots, n-1\}$
- $[n]$: $\{1, 2, \ldots, n\}$
- $\mathbb{Q}$: rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$: reelle Zahlen

Operationen auf Mengen

- Vereinigung $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- Schnittmenge $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
- Differenz $A \backslash B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
- Kartesisches Produkt $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$
- Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$

Bsp: M={rot,blau}, $\mathcal{P}(M)$={ $\emptyset$,{rot},{blau}, {rot,blau}}

Relation

Definition Relation

Eine Relation zwischen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.
Falls A=B, spricht man von einer Relation auf A.

Eigenschaften von Relationen auf einer Menge

Reflexiv:	$\forall a \in A : (a, a) \in R$
Symmetrisch:	$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
Antisymetrisch:	$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
Transitiv:	$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Bsp.:

- $R_1 := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \text{ teilt } b\}$: r,a,t (partielle Ordnung)
- $R_2 := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a = b \bmod 3\}$: r,s,t (Äquivalenzrelation)
- $R_3 := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \text{ teilt } b\}$: r,t (Quasiordnung)
- $R_4 := \{(a, b) \in [8]^2 \mid a = b \bmod 3, a \leq b\}$: r,a,t

Abbildungen/Funktionen

Definition Abbildung/Funktion

Eine Abbildung/Funktion ist eine Relation $R \subseteq A \times B$, falls für alle $a \in A$ gilt

$$|\{b \in B \mid (a, b) \in R\}| = 1.$$

Wir schreiben $f : A \to B, a \mapsto f(a)$. Die Menge der *Urbilder* eines Elements $b \in B$ bezeichnen wir mit $f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}$.

Wir definieren für $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ eine Erweiterung auf Mengen:

$$\begin{aligned} f(A') &= \bigcup_{a \in A'} \{f(a)\} \\ f(B') &= \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b) \end{aligned}$$

Eigenschaften von Funktionen, Isomorphie

Definition Eigenschaften von Funktionen

Sei f eine Funktion. Wir bezeichnen f als

1. *injektiv* gdw für alle $b \in B : |f^1(b)| \leq 1$.
2. *surjektiv* gdw für alle $b \in B : |f^1(b)| \geq 1$.
3. *bijektiv* gdw f injektiv und f surjektiv ist.

Isomorphismus

Seien $R_1 \subseteq A_1^2$, $R_2 \subseteq A_2^2$ Relationen. R_1 und R_2 heißen *isomorph* gdw eine bijektive Funktion $f : A_1 \to A_2$ existiert, so dass für alle $(a, b) \in A_1^2$:

$$(a, b) \in R_1 \Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in R_2.$$

Indirekter Beweis/ Widerspruchsbeweis

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$n^2 \text{ gerade } \Rightarrow n \text{ gerade.}$$

Beweis:

- Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- D.h. es genügt zu zeigen: n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade
- Wir schreiben n in der Form $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}_0$
- Daher gilt $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(k^2 + 2k) + 1$.
- D.h. n^2 ist ungerade.