

Satz Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beweis

- Multipliziere $(a + b)^n$ aus: $(a + b) \cdot (a + b) \cdot \dots \cdot (a + b)$.
- Aus jedem der n Faktoren wird entweder a oder b verwendet.
- Alle Summanden sind von der Form $a^k b^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$.
- Multiplikation ist kommutativ, d. h. $b \cdot a \cdot b^2 \cdot a = a^2 b^3$.
- Für $a^k b^{n-k}$ muss genau k -mal ein a verwendet werden.
- Ziehen k Positionen für a . Das Ziehen erfolgt
 - ▶ ohne Zurücklegen (jede Position darf nur einmal gezogen werden)
 - ▶ ungeordnet (aufgrund der Kommutativität der Multiplikation)
- D.h. der Summand $a^k b^{n-k}$ taucht $\binom{n}{k}$ -mal als Summand auf.

Summenregel

Lemma Summenregel für disjunkte Vereinigung

Seien $S_1, \dots, S_n$ disjunkte Mengen. Dann gilt für deren Vereinigung $S = \bigsqcup_{i=1}^n S_i$

$$|S| = \sum_{i=1}^n |S_i|.$$

Bsp: Sei $S = \{S_i \subseteq [10] \mid |S_i| = 5 \text{ und } |S_i \cap \{1, 2\}| = 1\} \subseteq \mathcal{P}([10])$.
Bestimme $|S|$.

- Wir definieren $S = S_1 \cup S_2$ für folgende Mengen $S_1, S_2 \subseteq \mathcal{P}(S)$.
 - ▶ S_1 : Enthält Mengen $S_{1i} \subseteq [10]$ mit Element 1 und 4 weiteren Elemente aus $\{3, \dots, 10\}$.
 - ▶ S_2 : Enthält Mengen $S_{2j} \subseteq [10]$ mit Element 2 und 4 weiteren Elemente aus $\{3, \dots, 10\}$.
- Die Mengen S_1, S_2 sind disjunkt, da die Elemente S_{1i} und S_{2j} paarweise verschieden sind.
- Die Mengen S_1 und S_2 enthalten jeweils $\binom{8}{4}$ Elemente.
- Mit der Summenregel folgt $|S| = |S_1| + |S_2| = 2 \cdot \binom{8}{4}$.

Produktregel

Lemma Produktregel für das kartesische Produkt

Seien $S_1, \dots, S_n$ Mengen. Dann gilt für das kartesische Produkt $S = S_1 \times \dots \times S_n$, dass

$$|S| = \prod_{i=1}^n |S_i|.$$

Bsp: Bestimmen die Anzahl fünfstelliger Zahlen, deren i -te Ziffer durch $i + 1$ teilbar ist.

- 1. Ziffer: $S_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ mit $|S_1| = 5$.
- 2. Ziffer: $S_2 = \{0, 3, 6, 9\}$ mit $|S_2| = 4$.
- 3. Ziffer: $S_3 = \{0, 4, 8\}$ mit $|S_3| = 3$.
- 4. Ziffer: $S_4 = \{0, 5\}$ mit $|S_4| = 2$.
- 5. Ziffer: $S_5 = \{0, 6\}$ mit $|S_5| = 2$.
- Für $S = S_1 \times \dots \times S_5$ erhalten wir mit Produktregel $|S| = 5! \cdot 2 = 240$.

Produktregel

Bsp aus der Laufzeitanalyse:

Algorithmus Verschachtelte Schleifen

```
1  $x \leftarrow 0;$   
2 for  $i=1$  to 5 do  
3     for  $j=1$  to 10 do  
4          $x \leftarrow x+1;$ 
```

- $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S_2 = \{1, 2, \dots, 10\}$
- Schleife in Schritt 4 durchläuft alle (i, j) mit $i \in S_1, j \in S_2$.
- Produktregel liefert für $S = S_1 \times S_2$ eine Anzahl von $|S| = |S_1| \cdot |S_2| = 5 \cdot 10$ Schleifendurchläufen.

Gleichheitsregel

Lemma Gleichheitsregel für Bijektionen

Seien S, T Mengen und $f : S \rightarrow T$ eine Bijektion. Dann gilt

$$|S| = |T|.$$

Bsp:

Algorithmus Wieder verschachtelte Schleifen

```
1  $x \leftarrow 0;$   
2 for  $i=1$  to 5 do  
3     for  $j=1$  to 10 do  
4          $x \leftarrow x+1;$ 
```

- Sei $S = [5] \times [10]$. Die Variablen (i, j) nehmen alle Werte aus S an.
- Die Abbildung $f : [5] \times [10] \rightarrow [50], (i, j) \mapsto x$ in Schritt 4 ist bijektiv.
- x nimmt in Schritt 4 Werte aus $[50]$ an.
- Gleichheitsregel: Anzahl Schleifendurchläufe ist $|S| = |T| = 50$.

Weiteres Beispiel zur Gleichheitsregel

Bereits bekanntes Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen, ungeordnet

- Es existiert eine bijektive Abbildung f zwischen
 - ▶ Multimengen der Kardinalität k über einer Grundmenge mit n Elementen und
 - ▶ Kodierungen in Form von k Sternen $*$ und $n - 1$ Trennstrichen $|$.
- Anstatt die Anzahl der möglichen Multimengen zu zählen, haben wir die Anzahl der Kodierungen gezählt.

Doppeltes Abzählen

Lemma Doppeltes Abzählen

Seien S, T Mengen und $R \subseteq S \times T$ eine Relation. Dann gilt

$$\sum_{s \in S} |\{t \in T \mid (s, t) \in R\}| = \sum_{t \in T} |\{s \in S \mid (s, t) \in R\}|.$$

Relation in Form einer Matrix: Dann gilt Zeilensumme=Spaltensumme.

Algorithmus Verschachtelte Schleife, die Dritte

```
1  $x \leftarrow 0;$ 
2 for  $i=1$  to 5 do
3      $j=1$  to  $i$  do
4          $x \leftarrow x+1;$ 
```

- Definiere $R = \{(i, j) \in [5]^2 \mid j \leq i\}$.
- Zeilensumme: $\sum_{i \in [5]} |\{j \in [5] \mid j \leq i\}| = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.
- Spaltensumme: $\sum_{j \in [5]} |\{i \in [5] \mid i \geq j\}| = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$.

Schubfachprinzip (Pigeonhole principle)

Satz Schubfachprinzip

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit $|X| > |Y|$.

Dann gibt es ein $y \in Y$ mit

$$|f^{-1}(y)| \geq 2.$$

Anders gesagt: Verteilt man n Elemente auf m , $m < n$, Fächer, so gibt es stets ein Fach, das mehr als ein Element enthält.

Bsp:

Unter 367 Leuten gibt es stets zwei Personen, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

Schubfachprinzip

Satz

In jeder Menge P von Personen gibt es stets zwei Personen, die die gleiche Anzahl von anderen Personen in P kennen.

Beweis

- Sei $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.
- Wir setzen voraus, dass die Relation „kennen“ symmetrisch ist, d.h. für alle p_i, p_j gilt: p_i kennt $p_j \Leftrightarrow p_j$ kennt p_i .
- Betrachte $f : P \rightarrow \mathbb{Z}_n$ mit $f(p_i) = j \Leftrightarrow p_i$ kennt j Personen.
- Problem: $|P| = |\mathbb{Z}_n| = n$, d. h. f könnte Bijektion sein.
- Annahme: f bijektiv.
 - ▶ $\exists p_j, p_i$ mit $f(p_i) = 0$ und $f(p_j) = n - 1$.
 - ▶ Widerspruch: p_j kennt jeden, insbesondere p_i , aber p_i kennt keinen.
- f ist nicht surjektiv und wegen $|\bigcup_{p \in P} \{f(p)\}| < n$ nicht injektiv (Anwendung des Schubfachprinzips).
- Es gibt $i, j \in [n]$, $i \neq j$ mit $f(p_i) = f(p_j)$.

Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Satz Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Sei $f : X \rightarrow Y$. Dann gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil$.

Anders gesagt: Verteilt man n Elemente auf m Fächer, so gibt es ein Fach, dass mindestens $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ Elemente enthält.

Beweis

- Annahme: Für alle $y \in Y$ gilt: $|f^{-1}(y)| \leq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1$
- Damit folgt $\sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \leq |Y| \cdot \left(\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1 \right) < |Y| \cdot \frac{|X|}{|Y|} = |X|$.
- Widerspruch durch das Prinzip des Doppelten Abzählens:

$$\begin{aligned} \text{Spaltensumme} &= \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \\ &< |X| = \sum_{x \in X} 1 = \sum_{x \in X} |\{f(x)\}| = \text{Zeilensumme} \end{aligned}$$

Anwendung des Verallgemeinerten Schubfachprinzips

Szenario:

- Teams $t_1, \dots, t_n$ spielen ein Turnier jeder gegen jeden.
- Gewinner erhalten 2 Punkte, bei Remis erhalten beide 1 Punkt.
- **Frage:** Wieviele Punkte hat der Gewinner mindestens?
- Definiere Punkteverteilungs-Funktion $f : [2] \times [n]^2 \rightarrow [n]$ mit
$$\begin{aligned} f(1, i, j) = f(2, i, j) = i &\Leftrightarrow i \text{ schlägt } j \\ f(1, i, j) = f(2, i, j) = j &\Leftrightarrow j \text{ schlägt } i \\ f(1, i, j) = i \text{ und } f(2, i, j) = j &\Leftrightarrow \text{Remis} \end{aligned}$$
- Urbildraum: $|X| = 2 \cdot \binom{n}{2}$, Bildraum: $|Y| = n$
- Verallg. Schubfachprinzip: Der Sieger besitzt mindestens

$$\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil = \frac{2n(n-1)}{2n} = n - 1 \text{ Punkte.}$$

Verallg. Schubfachprinzip – Ramsey-Theorie

Satz Ramsey

In jeder Gruppe P von 6 Personen gibt es entweder 3 Personen, die sich alle kennen oder 3 Personen, die sich alle nicht kennen.

Beweis

- Definieren $f : \{p_2, \dots, p_6\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $f(p_i) = 1 \Leftrightarrow p_1$ kennt p_i .

- Das Verallg. Schubfachprinzip liefert:

Fall 1: p_1 kennt mindestens $\lceil 5/2 \rceil = 3$ Personen oder

Fall 2: p_1 kennt mindestens $\lceil 5/2 \rceil = 3$ Personen nicht.

- Betrachte nur Fall 1 (Fall 2 analog): OBdA p_1 kennt p_2, p_3, p_4 .

- Weitere Fallunterscheidung:

Fall 1a: p_2, p_3, p_4 kennen sich nicht untereinander nicht.

Dann gibt es 3 Personen die sich nicht kennen.

Fall 1b: Von p_2, p_3, p_4 kennen sich mindestens 2 Personen, oBdA seien dies p_2, p_3 . Dann kennen sich die 3 Personen p_1, p_2, p_3 .