

Berechnung von Teilmengen

Satz Anzahl der Teilmengen

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Beweis

- Korollar aus Binomischem Lehrsatz $(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$.
- Oder kombinatorisch: Sei M Menge mit $|M| = n$.
- Die Kardinalität der Potenzmengen $\mathcal{P}(M)$ ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.
- In $\mathcal{P}(M)$ sind alle k -elementigen Teilmengen von M enthalten.
- Sei S_k die Menge der k -elementigen Teilmengen von M .
- Es gilt $|S_k| = \binom{n}{k}$ für $k = 0, \dots, n$.
- Ferner ist $\mathcal{P}(M) = \bigsqcup_{k=0}^n S_k$ und damit nach Summenregel

$$2^n = |\mathcal{P}(M)| = \sum_{k=0}^n |S_k| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Rekursive Berechnung von Binomialkoeffizienten

Satz Rekursion Binomialkoeffizienten

Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis

- Wir partitionieren die k -elementigen Teilmengen S_k von $[n]$:
 - Fall 1:** S_k enthält n . Damit enthält S_k noch $k-1$ Elemente aus $[n-1]$. Dafür gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten.
 - Fall 2:** S_k enthält n nicht. Damit enthält S_k insgesamt k Elemente aus $[n-1]$, wofür es $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten gibt.
- D.h. die $\binom{n}{k}$ vielen k -elementigen S_k lassen sich in $\binom{n-1}{k-1}$ und $\binom{n-1}{k}$ Teilmengen partitionieren.
- Aus der Summenregel folgt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Pascal'sches Dreieck

Rekursionsformel: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$n = 0$					1				
$n = 1$				1		1			
$n = 2$			1		2		1		
$n = 3$		1		3		3		1	
$n = 4$		1		4		6		4	
$n = 5$	1		5		10		10		5

Vandermonde'sche Identität

Satz Vandermonde Identität

Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{t=0}^k \binom{n}{t} \binom{m}{k-t}.$$

Beweis

- Sei $M = \{1, 2, \dots, n+m\}$.
- Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von M ist $\binom{n+m}{k}$.
- Partitionieren M in $M_1 = \{1, \dots, n\}$ und $M_2 = \{n+1, \dots, n+m\}$.
- Die k -elementigen Teilmengen von M lassen sich darstellen als Vereinigung von t -elementigen Teilmengen von M_1 und $(k-t)$ -elementigen Teilmengen von M_2 für $t = 0, \dots, k$.
- Anzahl der t -elementigen Teilmengen von M_1 : $\binom{n}{t}$.
- Anzahl der $(k-t)$ -elementigen Teilmengen von M_2 : $\binom{m}{k-t}$.
- Summenregel: Aus $M = M_1 \uplus M_2$ folgt die Vandermonde Identität.

k -Partition, Stirlingzahl zweiter Art

Definition k -Partition, Stirlingzahl zweiter Art

Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Eine k -Partition von A ist eine Zerlegung von A in k paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_k \subseteq A$ mit $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$.

Wir bezeichnen mit $S_{n,k}$ die Anzahl von k -Partitionen einer n -elementigen Menge. $S_{n,k}$ heisst auch die *Sterlingzahl zweiter Art*.

Bsp: $A = \{1, 2, 3\}$ und $k = 2$

- $\{1\} \cup \{2, 3\}, \{1, 2\} \cup \{3\}, \{1, 3\} \cup \{2\}$
- D.h. $S_{3,2} = 3$.

Spezialfälle:

- $S_{n,k} = 0$ für $k > n$
- $S_{n,n} = S_{n,1} = 1, S_{n,0} = 0$
- $S_{0,0} := 1$

Rekursive Berechnung von $S_{k,n}$

Satz Rekursive Berechnung der Stirlingzahl 2. Art

Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}.$$

Beweis:

- Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.
- Wir teilen die k -Partitionen $A_1, \dots, A_k$ in zwei Klassen auf.
 - Fall 1: $A_i = \{a_n\}$ für ein $i \in [k]$. Dann befinden sich $a_1, \dots, a_{n-1}$ in einer $(k-1)$ -Partition. Dafür gibt es $S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten.
 - Fall 2: $a_n \in A_i$ und $|A_i| > 1$. Die Mengen $A_1, \dots, A_{i-1}, A_i \setminus a_n, A_{i+1}, \dots, A_k$ bilden eine k -Partition für $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Dafür gibt es $S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. Zum Einsortieren von a_n in eine der Teilmengen gibt es k Möglichkeiten. Insgesamt also $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten.
- Die Summenregel liefert $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$.

Beispiel: Rekursives Berechnen von $S_{4,2}$

Bsp:

- Anzahl der 2-Partitionen von $A = [4]$

Fall 1: $\{4\}$ ist eine Teilmenge. Die andere Teilmenge ist $\{1, 2, 3\}$.

Fall 2: $\{4\}$ ist in einer der drei 2-Partitionen von $\{1, 2, 3\}$:

- ▶ $\{1\} \cup \{2, 3\} : \{1, 4\} \cup \{2, 3\}, \{1\} \cup \{2, 3, 4\}$
- ▶ $\{1, 2\} \cup \{3\} : \{1, 2, 4\} \cup \{3\}, \{1, 2\} \cup \{3, 4\}$
- ▶ $\{1, 3\} \cup \{2\} : \{1, 3, 4\} \cup \{2\}, \{1, 3\} \cup \{2, 4\}$

- D.h. $S_{4,2} = S_{3,1} + 2 \cdot S_{3,2} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$.

Stirlingdreieck zweiter Art

Rekursionsformel: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$

$n = 0$					1					
$n = 1$				0		1				
$n = 2$			0		1		1			
$n = 3$		0		1		3		1		
$n = 4$		0	1		7		6		1	
$n = 5$	0		1		15		25		10	1

Bellzahlen

Definition Bellzahlen

Sei A eine Menge mit n Elementen. Mit B_n bezeichnen wir die Anzahl aller Partitionen von A .

Bsp: $A = \{1, 2, 3\}$

- $\{1, 2, 3\}, \{1\} \cup \{2, 3\}, \{1, 2\} \cup \{3\}, \{1, 3\} \cup \{2\}, \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.
- D.h. $B_3 = 5$.

Korollar Bellzahlen mittels Stirlingzahlen zweiter Art

$$B_n = \sum_{k=0}^n S_{n,k}.$$

- D.h. B_n ist die n -te Zeilensumme im Stirlingdreieck 2. Art.

Geordnete Zahlpartitionen

Definition Geordnete Zahlpartitionen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $Z_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe k positiver natürlicher Zahlen zu schreiben. Wir nennen $Z_{n,k}$ auch die Anzahl der *geordneten k -Zahlpartitionen von n* .

Bsp: 3-Zahlpartitionen von 5

- $1 + 1 + 3, 1 + 3 + 1, 3 + 1 + 1, 1 + 2 + 2, 2 + 1 + 2, 2 + 2 + 1$
- D.h. $Z_{5,3} = 6$.

Spezialfälle:

- $Z_{n,n} = Z_{n,1} = 1$
- $Z_{n,k} = 0$ für $k > n$

Berechnung von $Z_{n,k}$

Satz Anzahl geordneter k -Zahlpartitionen von n

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$Z_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Beweis:

- Schreiben jede Zahl n als Summe von n Einsen, z.B.

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

- Wählen $k - 1$ der $n - 1$ Pluszeichen als Trennzeichen aus, z.B.

$$5 = 1 \oplus 1 + 1 \oplus 1 + 1 = 1 + 2 + 2.$$

- ▶ Ziehen ohne Zurücklegen: Kein doppeltes Pluszeichen.
- ▶ ungeordnet: Reihenfolge der Pluszeichen ist ohne Belang.
- D.h. die Anzahl der geordneten k -Partitionen ist $\binom{n-1}{k-1}$.

Beispiel: Zählen von Lösungen

Bsp: Sei $X = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid x_1 + \dots + x_k = n\}$. Bestimme $|X|$.

- Problem: Summanden können Null sein.
- Wir addieren zu jedem der k Summanden eine Eins

$$x'_1 + \dots + x'_k = n + k \text{ mit } x'_i \geq 1 \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

- Jede Summe der x_i , die sich zu n aufaddieren entspricht eineindeutig einer geordneten k -Zahlpartition von $n + k$. (Isomorphismus)
- Mit Gleichheitsregel ergibt sich $|X| = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Ungeordnete Zahlpartitionen

Definition Ungeordnete Zahlpartitionen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $P_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten n als Summe k positiver Zahlen zu schreiben, wobei die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt. Wir nennen $P_{n,k}$ die Anzahl *ungeordneter k -Zahlpartitionen von n* .

Bsp: $P_{7,3}$

- $1 + 1 + 5, 1 + 2 + 4, 1 + 3 + 3, 2 + 2 + 3$
- D.h. $P_{7,3} = 4$.

Spezialfälle:

- $P_{n,n} = P_{n,1} = 1$
- $P_{n,k} = 0$ für $k > n$
- $P_{0,0} := 1$

Rekursive Berechnung ungeordneter Zahlpartitionen

Satz Anzahl ungeordneter Zahlpartitionen

Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ gilt $P_{n+k,k} = \sum_{j=1}^k P_{n,j}$.

Beweis:

- Wir zerlegen $n + k$ in i Einsen-Summanden und $k - i$ Summanden größer als 1, d.h.

$$n + k = 1 + \dots + 1 + n_{i+1} + \dots + n_k \text{ mit } n_j \geq 2 \text{ für } j = 1, \dots, k.$$

- Wir subtrahieren Eins von jedem der Summanden

$$n = n'_{i+1} + \dots + n'_k \text{ mit } n_j \geq 1 \text{ für } j = i + 1, \dots, k.$$

- D.h. die n'_j bilden eine ungeordnete $(k - i)$ -Zahlpartition von n .
- Andererseits liefert jede $(k - i)$ -Zahlpartition von n eineindeutig eine k -Zahlpartition von n mit genau i Einsen (Isomorphismus).
- Mit Gleichheitsregel: $P_{n+k,k}$ mit genau i Einsen ist $P_{n,k-i}$.
- Mit Summenregel: $P_{n+k,k} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{n,k-i} = \sum_{j=1}^k P_{n,j}$.