Verteilen von Bällen auf Urnen

Szenario:
Wir verteilen n Bälle auf m Urnen, d.h.

$$f : B \to U \text{ mit } B = \{b_1, \dots, b_n\} \text{ und } U = \{u_1, \dots, u_m\}.$$

Dabei unterscheiden wir alle Kombinationen der folgenden Fälle

1. Die Bälle sind unterscheidbar oder nicht unterscheidbar.
2. Die Urnen sind unterscheidbar oder nicht unterscheidbar.

Für alle vier Kombinationen untersuchen wir die Fälle

1. f beliebig, d.h. wir verteilen die Bälle beliebig.
2. f injektiv, d.h. jede Urne enthält höchstens einen Ball.
3. f surjektiv, d.h. jede Urne enthält mindestens einen Ball.
4. f bijektiv, d.h. jede Urne enthält genau einen Ball.

Bälle und Urnen sind unterscheidbar

***f* beliebig:**

- m Möglichkeiten für jeden der n Bälle, d.h. insgesamt m^n.

***f* injektiv:** Für $|B| = n \leq m = |U|$ gilt:

- m Möglichkeiten für den ersten Ball, $m - 1$ für den zweiten, usw.
- Insgesamt $m^{\underline{n}}$ Möglichkeiten.

***f* bijektiv:** Für $|B| = n = m = |U|$ gilt:

- m Möglichkeiten für den ersten Ball, $m - 1$ für den zweiten, usw.
- Insgesamt $m!$ Möglichkeiten.

Bälle und Urnen sind unterscheidbar

***f* surjektiv:** Für $|B| = n \geq m = |U|$ gilt:

- Definieren die Urbildmengen $T_u := \{f^{-1}(u) \mid u \in U\}$.
- Die T_u bilden eine m-Partition der Menge B.
- Damit gibt es $S_{n,m}$ Möglichkeiten für die Urbildmenge B.
- Für jede m-Partition $B_1, \ldots, B_m$ von B landen jeweils die Bälle aus einer Menge B_i gemeinsam in einer Urne.
- $m!$ Möglichkeiten, eine m-Partition auf m Urnen zu verteilen.
- D.h. wir erhalten insgesamt $S_{n,m} \cdot m!$ Möglichkeiten.

Urnen unterscheidbar, Bälle nicht

Idee: Wir zählen nur die Anzahl der Bälle pro Urne.

***f* beliebig:**

- Kodieren die Anzahl der Bälle mit insgesamt n Sternen.
- Unterscheiden die Urnen mit $m - 1$ Trennstrichen.
- z.B. **|***| bedeutet 2 Bälle in u_1, 3 in u_2 und 0 in u_3.
- Anzahl Kodierungen mit n Sternen und $m - 1$ Trennstrichen
$$\binom{n+m-1}{n}.$$

Urnen unterscheidbar, Bälle nicht

***f* injektiv:** Für $|B| = n \leq m = |U|$ gilt:

- Wählen n aus den m Urnen aus, die genau einen Ball enthalten.
- Insgesamt $\binom{m}{n}$ Möglichkeiten.

***f* surjektiv:** Für $|B| = n \geq m = |U|$ gilt:

- Die Urne u_i enthalte x_i Bälle für $i = 1, \ldots, m$.
- Die x_i bilden eine geordnete m-Zahlpartition von n, da
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n.$$
- D.h. wir erhalten $\binom{n-1}{m-1}$ Möglichkeiten.

***f* bijektiv:** Für $|B| = n = m = |U|$ gilt:

- Jede Urne enthält einen Ball: Genau eine Möglichkeit.

Bälle und Urnen nicht unterscheidbar

Idee: Anzahl Bälle in Urnen entscheidend, Reihenfolge belanglos.

***f* beliebig:**

- Angenommen, es werden genau k der n Urnen belegt.
- Sei $B_1, \ldots, B_k$ eine k-Partition von Bällen, so dass jeweils alle Bälle aus B_i gemeinsam in einer Urne landen.
- $|B_1| + \ldots + |B_k| = n$, d.h. die $|B_i|$ bilden eine Zahlpartition von n.
    - Dies ist eine ungeordnete Zahlpartition (Urnen ununterscheidbar).
- D.h. wir erhalten für ein festes k genau $P_{n,k}$ Möglichkeiten.
- Insgesamt erhalten wir damit $\sum_{k=1}^{m} P_{n,k}$ Möglichkeiten.

***f* surjektiv:** Für $|B| = n \geq m = |U|$ gilt:

- Da m Urnen belegt sind: $P_{n,m}$ Möglichkeiten.

Bälle und Urnen nicht unterscheidbar

***f* injektiv:** Für $|B| = n \leq m = |U|$ gilt:

- Jede der belegten Urnen enthält einen Ball: 1 Möglichkeit.

***f* bijektiv:** Für $|B| = n = m = |U|$ gilt:

- Alle Urnen enthalten genau einen Ball: 1 Möglichkeit.

Bälle unterscheidbar, Urnen nicht

Idee: Entspricht Partitionierung der Bälle.

***f* beliebig:**

- Seien genau k Urnen belegt.
- Sei $B_1, \ldots, B_k$ eine k-Partition von B, so dass alle Bälle in B_i gemeinsam in einer Urne landen.
- Die Anzahl der k-Partitionen von B beträgt $S_{n,k}$ für festes k.
- Insgesamt $\sum_{k=1}^{m} S_{n,k}$ Möglichkeiten.

***f* surjektiv:** Für $|B| = n \geq m = |U|$ gilt:

- Entspricht einer m-Partition von B, d.h $S_{n,m}$ Möglichkeiten.

Bälle unterscheidbar, Urnen nicht

f **injektiv:** Für $|B| = n \leq m = |U|$ gilt:

- In jeder Urne höchstens ein Ball: 1 Möglichkeit.

f **bijektiv:** Für $|B| = n = m = |U|$ gilt:

- In jeder Urne genau ein Ball: 1 Möglichkeit.

Zusammenfassung

$\lvert B\rvert = n$, $\lvert U\rvert = m$	beliebig	injektiv $n \leq m$	surjektiv $n \geq m$	bijektiv $n = m$
Bälle und Urnen unterscheidbar	m^n	$m^{\underline{n}}$	$S_{n,m} \cdot m!$	$m!$
Bälle gleich, Urnen unterscheidbar	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	1
Bälle unter-scheidbar, Urnen nicht	$\sum_{k=1}^{m} S_{n,k}$	1	$S_{n,m}$	1
Bälle und Urnen ununter-scheidbar	$\sum_{k=1}^{m} P_{n,k}$	1	$P_{n,m}$	1

Überblick über Graphentheorie

Ungerichtete Graphen:

- Baum, Spannbaum, Prüfercode
- Traversierung von Graphen: Breiten- und Tiefensuche
- Besuchen aller Kanten, Besuchen aller Knoten
- Färben von Knoten und Kanten, Matching

Gerichtete Graphen:

- Kreisfreiheit, topologische Sortierung
- Wurzelbaum

Ungerichtete Graphen

Definition Ungerichteter Graph

Ein *ungerichteter Graph* ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und
- der Kantenmenge $E = \{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq \{\{u, v\} \subseteq V^2 \mid u \neq v\}$.

D.h. insbesondere sind **nicht** erlaubt:

- Schlingen bzw. Selbstkanten $\{v, v\} \in E$
- Mehrere Kanten zwischen denselben Knoten, d.h. E ist keine Multimenge.

Motivation für Graphprobleme

Szenario:

- Wir veranstalten ein Turnier mit fünf Teilnehmern a, b, c, d, e.
- Jeder soll gegen jeden Spielen, d.h. $\binom{5}{2} = 10$ Partien.
- Keiner soll in aufeinanderfolgenden Spielen antreten.

Modellierung als Graph:

- Wir stellen alle Paarungen als Knoten in einem Graph dar.
- Wir verbinden zwei Knoten, falls sie disjunkte Mannschaften enthalten.

Graphproblem:

- Bestimme einen Pfad, der alle Knoten genau einmal besucht.
- Der Pfad bestimmt die Reihenfolge der Partien.

Isomorphie von Graphen

Definition Isomorphe Graphen

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ungerichtete Graphen. G_1 ist *isomorph* zu G_2, falls es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

Bsp: Anzahl der isomorphen Graphen mit n Knoten

- $n = 1$: Nur ein Graphen möglich.
- $n = 2$: Zwei Graphen, mit einer und keiner Kante.
- $n = 3$: Vier Graphen, mit Kantenzahl $0, 1, 2, 3$.

Anzahl der Isomorphieklassen für Graphen bis $n = 9$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl Graphen	1	2	4	11	34	156	1044	12344	308168

Spezielle Graphen

vollständiger Graph K_n:

- K_n enthält n vollständig miteinander verbundene Knoten.

Pfad P_n:

- P_n enthält n Knoten $v_1, \ldots, v_n$.
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$

Kreisgraph C_n:

- C_n enthält n Knoten $v_1, \ldots, v_n$.
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$

Spezielle Graphen

Gittergraph $M_{n,m}$:

- $M_{n,m}$ enthält n Zeilen mit jeweils m Knoten.
- Die Knoten jeder Zeile sind als Pfad verbunden.
- Die Knoten jeder Spalte sind ebenfalls als Pfad verbunden.

***d*-dimensionaler Hyperwürfel Q_n:**

- $V = \{0, 1\}^d$
- $E = \{\{u, v\} \in V^2 \mid u, v \text{ unterscheiden sich in einer Stelle.}\}$