

Definition Eigenschaften von Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- 1 Die *Nachbarschaft* $\Gamma(u)$ eines Knoten $u \in V$ ist $\Gamma(u) := \{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}$.
- 2 Der *Grad* $\deg(u)$ eines Knotens u ist $\deg(u) := |\Gamma(u)|$.
- 3 G heißt *k-regulär* gdw jeder Knoten in G Grad k besitzt.
- 4 Falls $e = \{u, v\} \in E$, dann heißen u und v *adjazent*. Man nennt die Endpunkte u und v von e die zu e *inzidenten* Knoten.

Satz Handschlaglemma

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$.

Beweis:

- Zählen für jeden Knoten die Anzahl seiner Nachbarn

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V} |\Gamma(v)| = \sum_{u \in V} |\{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}|.$$

- Zählen dabei jede Kante $e = \{u, v\}$ genau zweimal: Einmal bei den Nachbarn von v und einmal bei den Nachbarn von u .

Handschlaglemma Teil 2

Lemma Knoten mit geradem Grad

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Die Anzahl der Knoten in G mit ungeradem Grad ist gerade.

Beweis:

- Wir partitionieren V in Knoten mit geradem/ungeradem Grad:
 $V_g := \{v \in V \mid \deg(v) \text{ gerade}\}$, $V_u := \{v \in V \mid \deg(v) \text{ ungerade}\}$.
- Es gilt $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_g} \deg(v) + \sum_{v \in V_u} \deg(v)$.
- $\sum_{v \in V_g} \deg(v)$ ist gerade, da jeder Summand gerade ist.
- Daher ist $\sum_{v \in V_u} \deg(v)$ ebenfalls gerade, sonst könnte die Summe nicht gerade sein.
- $\sum_{v \in V_u} \deg(v)$ enthält nur ungerade Summanden.
- D.h. $|V_u|$ muss gerade sein.

Definition Weg, Pfad, Kreis

Sei G ein ungerichteter Graph.

- 1 Eine Knotenfolge $(v_0, \dots, v_k) \in V^{k+1}$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $0 \leq i < k$ heißt *Weg der Länge k* mit Anfangsknoten v_0 und Endknoten v_k .
- 2 Ein knotendisjunkter Weg heißt *Pfad*.
- 3 Ein u - v *Weg/Pfad* ist ein Weg/Pfad mit Anfangsknoten u und Endknoten v .
- 4 Ein Kreis der Länge k , $k > 2$ ist eine knotendisjunkte Folge $(v_0, \dots, v_{k-1})$ mit $\{v_i, v_{i+1 \bmod k}\} \in E$ für $0 \leq i < k$.

Schwacher/induzierter Teilgraph

Definition Schwacher und induzierter Teilgraph

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $V' \subseteq V$.

- 1 Sei $E_1 \subseteq \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in V'\}$. Dann heißt $G_1 = (V', E_1)$ *schwacher Teilgraph* von G .
- 2 Sei $E_2 = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in V'\}$. Dann heißt $G_2 = (V', E_2)$ der von V' *induzierte Teilgraph*. Wir schreiben auch $G_2 = G[V']$.

Zusammenhang

Definition Zusammenhängend, Zusammenhangskomponente

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- 1 G ist zusammenhängend gdw für alle $u, v \in V$ ein u - v Pfad in G existiert.
- 2 Sei G nicht zusammenhängend und $V' \subseteq V$ maximal mit der Eigenschaft, dass für alle $u, v \in V'$ ein u - v Pfad in $G[V']$ existiert. Dann heißt $G[V']$ *Zusammenhangskomponente* (ZHK).

Beispiel:

- Wir betrachten die Relation $R = \{(u, v) \in V^2 \mid \{u, v\} \in E\}$.
- Sei $R^* = \{(u, v) \in V^2 \mid \text{Es existiert ein } u\text{-}v \text{ Pfad in } G\}$.
- R^* heißt *reflexive, transitive Hülle* von R .
- R^* ist Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv.
- Die Äquivalenzklassen definieren die ZHKs von G .

Anzahl Zusammenhangskomponenten

Satz Anzahl ZHKs

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Dann besitzt G mindestens $n - m$ Zusammenhangskomponenten.

Beweis:

- Induktion über die Kantenanzahl m .
- **IV für $m = 0$:** Dann besitzt G die ZHKs $G[v_1], \dots, G[v_n]$.
- **IS ($m - 1 \rightarrow m$):** Sei $e_m = \{u, v\}$ und $E' = E \setminus \{e_m\}$.
- Nach **IA** besitzt $G' = (V, E')$ mindestens $n - (m - 1)$ ZHKs.

Fall 1: u, v liegen in derselben ZHK von G' .

- ▶ Dann besitzt G mindestens $n - m + 1$ ZHKs.

Fall 2: u, v liegen in verschiedenen ZHKs von G' .

- ▶ Dann besitzt G mindestens $n - m$ Zusammenhangskomponenten.

Für zusammenhängende Graphen

Korollar Kanten in zusammenhängendem Graph

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph. Dann gilt $|E| \geq |V| - 1$.

Beweis:

- In jedem Graph ist die Anzahl der ZHKs mindestens $|V| - |E|$.
- Da G zusammenhängend ist, besitzt G genau eine ZHK. Damit
$$\#(\text{ZHK}(G)) = 1 \geq |V| - |E|.$$
- Es folgt $|E| \geq |V| - 1$.

Definition Baum und Wald

Sei G ein ungerichteter Graph.

- ➊ G heißt *kreisfrei* gdw kein schwacher Teilgraph von G ein Kreis ist.
- ➋ G heißt *Baum* gdw G kreisfrei und zusammenhängend ist.
- ➌ G heißt *Wald* gdw die ZHKs von G Bäume sind.
- ➍ Jeder Knoten v eines Baums mit $\deg(v) = 1$ heißt *Blatt*.

Eigenschaften von Bäumen

Satz Eigenschaft von Bäumen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1 G ist ein Baum.
- 2 Für alle $u, v \in V$ existiert genau ein u - v Pfad in G .
- 3 G ist zusammenhängend, aber $G' = (V, E \setminus \{e\})$ ist für alle $e \in E$ nicht zusammenhängend.
- 4 G ist zusammenhängend und besitzt genau $n - 1$ Kanten.
- 5 G ist kreisfrei und besitzt genau $n - 1$ Kanten.
- 6 G ist kreisfrei und für alle nicht adjazenten $u, v \in V$ gilt $G' = (V, E \cup \{u, v\})$ enthält einen Kreis.

Beweis: Durch Ringschluss $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$.

Ringschluss 1 $\Rightarrow$ 2

Lemma Ringschluss 1 $\Rightarrow$ 2

Sei G ein Baum. Dann existiert für alle $u, v \in V$ genau ein u - v Pfad.

Beweis:

- Da G zusammenhängend ist, existiert ein u - v Pfad
 $p = (v_0 = u, \dots, v_k = v)$ in G .
- **Annahme:** Es existiert ein zweiter u - v Pfad
 $p' = (v'_0 = u, \dots, v'_t = v)$ in G .
- Sei r minimal mit $v_{r+1} \neq v'_{r+1}$, d.h. die Pfade gabeln sich bei v_r .
- Sei v_ℓ , $\ell > r$ der erste Knoten im Pfad $(v_{r+1}, \dots, v_k)$, der auch im Pfad $(v'_{r+1}, \dots, v'_t)$ auftritt.
- D.h. beide Pfade werden bei v_ℓ wieder zusammengeführt.
- Man beachte, dass ein solcher Knoten v_ℓ existieren muss, da p und p' denselben Endknoten besitzen.
- Damit ist $(v_r, v_{r+1}, \dots, v_\ell, \dots, v'_{r+2}, v'_{r+1})$ ein Kreis in G .
(Widerspruch zur Kreisfreiheit eines Baums G).

Ringschluss $2 \Rightarrow 3$

Lemma Ringschluss $2 \Rightarrow 3$

Falls für alle $u, v \in V$ genau ein u - v Pfad existiert, dann ist G zusammenhängend, aber $G' = (V, E \setminus \{e\})$ ist für alle $e \in E$ nicht zusammenhängend.

Beweis:

- G ist zusammenhängend nach Definition.
- Sei $e = \{u, v\}$ beliebig.
- Nach Voraussetzung ist (u, v) der einzige u - v Pfad.
- D.h. $G' = (V, E \setminus \{e\})$ besitzt keinen u - v Pfad.
- Damit ist G' nicht zusammenhängend.

Ringschluss 3 $\Rightarrow$ 4

Lemma Ringschluss 3 $\Rightarrow$ 4

Sei G zusammenhängend, aber $G' = (V, E \setminus \{e\})$ für alle $e \in E$ nicht zusammenhängend. Dann ist G zusammenhängend und besitzt genau $n - 1$ Kanten.

Beweis:

- Durch Entfernen jeder beliebigen Kante aus E erhöht sich die Anzahl der ZHKs um Eins.
- G ist zusammenhängend, besitzt also eine ZHK.
- $G_1 = (V, E \setminus \{e_1\})$ besitzt 2 ZHKs.
- $G_2 = (V, E \setminus \{e_1, e_2\})$ besitzt 3 ZHKs, usw.
- Damit besitzt $G_{n-1} = (V, \emptyset)$ genau n ZHKs.
- G_{n-1} entsteht durch Entfernen aller $m = n - 1$ Kanten.

Ringschluss $4 \Rightarrow 5$

Lemma Ringschluss $4 \Rightarrow 5$

G ist zusammenhängend mit genau $n - 1$ Kanten gdw G kreisfrei mit genau $n - 1$ Kanten ist.

Beweis: Richtung $4 \Rightarrow 5$

- **Annahme:** G besitzt einen Kreis $K = (v_0, \dots, v_{k-1})$.
- Da G zusammenhängend ist, müssen die $n - k$ Knoten außerhalb des Kreises von den k Kreisknoten aus erreichbar sein.
- Einbinden der Nicht-Kreisknoten erfordert eine Kante pro Knoten.
- Damit besitzt G mindestens $k + (n - k)$ Kanten.
(Widerspruch: G besitzt genau $n - 1$ Kanten.)

Rückrichtung 5 $\Rightarrow$ 4

Beweis: Richtung 5 $\Rightarrow$ 4

- Fügen $n - 1$ Kanten aus E sukzessive zu $G_0 = (V, \emptyset)$ hinzu.
- G_0 besitzt n Zusammenhangskomponenten.
- Müssen zeigen, dass jede Kante $e = \{u, v\}$ zwei verschiedene ZHKs verbindet.
- **Annahme:** u, v sind bereits durch einen u - v Pfad p verbunden.
- Dann schließt p zusammen mit e einen Kreis in G .
(Widerspruch zur Kreisfreiheit von G)
- Damit verringert jede Kante die Anzahl der ZHKs um Eins.
- Da wir genau $n - 1$ Kanten einfügen, besitzt G genau eine ZHK.
- D.h. G ist zusammenhängend.

Ringschluss $5 \Rightarrow 6$

Lemma Ringschluss $5 \Rightarrow 6$

Sei G kreisfrei mit genau $n - 1$ Kanten. Dann ist G zusammenhängend und für alle nicht adjazenten $u, v \in V$ enthält $G' = (V, E \cup \{u, v\})$ einen Kreis.

Beweis:

- Wegen $5 \Rightarrow 4$ folgt, dass G zusammenhängend ist.
- D.h. für alle nicht adjazenten $u, v \in V$ existiert ein u - v Pfad p in G .
- Damit bildet p zusammen mit der Kante $\{u, v\}$ einen Kreis.

Ringschluss 6 $\Rightarrow$ 1

Lemma Ringschluss 6 $\Rightarrow$ 1

Sei G kreisfrei und für alle nicht adjazenten $u, v \in V$ enthalte $G' = (V, E \cup \{u, v\})$ einen Kreis. Dann ist G ein Baum.

Beweis:

- Fallunterscheidung für alle disjunkten $u, v \in V$:

Fall 1: $\{u, v\} \in E$. Damit existiert ein u - v Pfad in G .

Fall 2: $\{u, v\} \notin E$. Damit ist $\{u, v\}$ in einem Kreis K von G' enthalten. Entfernt man $\{u, v\}$ aus G' , so erhält man G . Es existiert noch immer ein u - v Pfad in G , nämlich der Rest des Kreises K .

- Damit existiert für alle u, v ein u - v Pfad in G .
- D.h. G ist zusammenhängend und nach Voraussetzung kreisfrei, d.h. G ist ein Baum.