Naiver Algorithmus für Hamiltonkreis

Algorithmus Hamilton

EINGABE: $G = ([n], E)$ in Adjazenzmatrixdarstellung

1. Für alle Permutationen $\pi : [n] \to [n]$.
    1. Falls $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ ein Kreis in G ist, AUSGABE "G hamiltonsch", EXIT.
2. AUSGABE "G nicht hamiltonsch".

- **Korrektheit:** Hamilton testet alle möglichen Hamiltonkreise.
- **Laufzeit:** Schleife 1 durchläuft $n!$ viele Iterationen.
- Stirling-Formel liefert $n! = \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$.
- D.h. die Laufzeit ist exponentiell in n.
- In Diskrete Mathematik 2: Vermutlich gibt es für allgemeine Graphen keinen Algorithmus mit Laufzeit polynomiell in n.

Hamiltonkreis in dichten Graphen

Satz Hinreichendes Kriterium für hamiltonsch

Sei $G = (V, E)$ mit $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ für alle $u, v \in V$. Dann ist G hamiltonsch.

Beweis:

- **Annahme:** $G = (V, E)$ besitze keinen Hamiltonkreis.
- Sei E maximal, so dass G nicht hamiltonsch ist.
- D.h. für alle $\{u, v\} \notin E$ ist $G' = (V, E \cup \{u, v\})$ hamiltonsch.
- Sei $K = (u = v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v = v_{\pi(n)})$ ein Hamiltonkreis in G'.
- Wir definieren $S = \Gamma(u)$ und $T = \{v_{\pi(i)} \in K \mid \{v, v_{\pi(i-1)}\} \in E\}$.
- Es gilt $u \notin S$ und $u \notin T$. Damit ist $|S \cup T| \leq n - 1$.
- Andererseits gilt $|S| + |T| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.
- Schubfachprinzip: Es gibt ein $j \in \{2, \ldots, n-1\}$ mit $v_{\pi(j)} \in S \cap T$.
- Damit ist sowohl $\{u, v_{\pi(j)}\} \in E$ als auch $\{v, v_{\pi(j-1)}\} \in E$.
- D.h. $(u, v_{\pi(j)}, v_{\pi(j+1)}, \ldots, v, v_{\pi(j-1)}, \ldots, v_{\pi(2)})$ ist Hamiltonkreis. (Widerspruch zur Annahme, dass G nicht hamiltonsch ist.)

Algorithmus für dichte Graphen

Algorithmus DENSE-HAMILTON

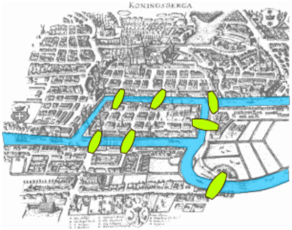
EINGABE: $G = ([n], E)$ mit $deg(u) + \deg(v) \geq n$ für alle $u, v \in V$.

1. Setze $K = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \leftarrow (1, 2, \ldots, n)$
2. While (K ist kein Kreis in G)
   1. Wende auf K die Konstruktion aus dem Beweis zuvor an.

AUSGABE: Hamiltonkreis K

- **Korrektheit:** Fügen in jeder Iteration zwei Kreiskanten hinzu.
- **Laufzeit:** $\mathcal{O}(n)$ Iterationen.

Königsberger Brückenproblem (Euler 1736)



Frage: Gibt es einen Rundweg durch Königsberg, der alle Brücken genau einmal verwendet?

Definition Eulertour

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend.

1. Eine *Eulertour* in G ist ein Weg, der alle Kanten genau einmal besucht und bei dem Anfangs- und Endknoten übereinstimmen.
2. Falls G eine Eulertour enthält, heißt G *eulersch*.

Kriterium für eulersche Graphen

Satz Eulerscher Graph

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend. G ist eulersch gdw $\deg(v)$ gerade ist für alle $v \in V$.

Beweis: $\Rightarrow$

- Sei G eulersch mit Eulertour $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0)$.
- Jeder Knoten $v \neq v_0$ komme t-mal in p vor.
- Dann ist $\deg(v) = 2t$ gerade.
- Der Knoten v_0 komme $t + 2$-mal, $t \geq 0$, in p vor.
- Dann ist $\deg(v_0) = 2t + 2$ ebenfalls gerade.

$\deg(v)$ gerade $\Rightarrow G$ eulersch

Algorithmus EULERTOUR

EINGABE: $G = (V, E)$ zusammenhängend mit geraden Knotengraden

1. Wähle Weg $W_0 \leftarrow (v)$ für ein beliebiges $v \in V$. Setze $i \leftarrow 0$.
2. While (nicht alle Kanten von G besucht)
    1. $i \leftarrow i + 1$
    2. Wähle Knoten v_i in $W_{i-1} = (v_0, \ldots, v_k = v_0)$, der zu nicht besuchter Kante $\{v_i, u\}$ inzident ist.
    3. Konstruiere Weg $W_i' = (v_i, u, \ldots, v_i)$.
    4. $W_i \leftarrow (v_0, \ldots, v_i, u, \ldots, v_i, \ldots, v_0)$, d.h. verschmelze W_{i-1} und W_i'.

AUSGABE: Eulertour W_i

Korrektheit von EULERTOUR

Korrektheit:

- Bei Terminierung sind alle Kanten besucht.
- EULERTOUR terminiert, da G zusammenhängend ist.
- Die Anzahl besuchter Kanten pro Knoten ist für jedes W_i gerade:
  - Jeder der inneren Knoten $v_1, \ldots, v_{k-1}$ wird über eine Kante besucht und wieder verlassen.
  - Da jedes der W_i ein nicht knotendisjunkter Kreis ist, wird auch der Startknoten v_0 verlassen und wieder besucht.
- D.h. jeder Knoten $v \in V$ besitzt geraden Restgrad $\deg(v)$.
- W_i' kann in Schritt 3.3 konstruiert werden, da alle besuchten Knoten auch wieder verlassen werden können.
- Ein solcher Weg muss schließlich wieder in v_i enden.

Planare Graphen

Definition Planarer Graph

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. G heißt *planar*, falls er in den $\mathbb{R}^2$ einbettbar ist. D.h. falls seine Kanten so dargestellt werden können, dass sie sich paarweise nicht schneiden.
Eine planare Darstellung von G bezeichnen wir als *ebenes Diagramm*.

Anmerkung:

- Der Einfachheit halber verstehen wir hier Kanten als Kurven.
- Die Verwendung von Strecken als Kanten liefert dieselbe Klasse planarer Graphen (Fary's Theorem).

Bsp:

- Der K_4 ist ein planarer Graph.
- Ein bipartiter Graph $G = K_{n,n'}$ besteht aus zwei Knotenmengen V_1, V_2 mit $|V_1| = n, |V_2| = n'$ und $E = \{\{u, v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}$.
- Die bipartiten Graphen $K_{n,2}$ sind planar.

Anzahl Flächen planarer Graphen

Satz Eulersche Polyederformel

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend und planar. Sei f die Anzahl der Flächen eines ebenen Diagramms von G. Dann gilt $f = |E| - |V| + 2$.

Beweis: per Induktion über $|E|$

- **IV** für $|E| = n - 1$, da G für $|E| < n - 1$ nicht zusammenhängend.
  - Da G zusammenhängend mit $|E| = n - 1$, ist G ein Baum.
  - Damit gilt für ein ebenes Diagramm $f = 1 = (n - 1) - n + 2$.
- **IS** $|E| - 1 \to |E|$.
  - $G = (V, E)$ muss einen Kreis K enthalten. Sei e eine Kreiskante.
  - $G' = (V, E \setminus \{e\})$ besitzt $|E| - 1$ Kanten und daher $f' = |E| - |V| + 1$ Flächen. (Anwendung der IA)
  - In G werden zwei Flächen von G' durch e getrennt.
  - Damit besitzt G genau $f' + 1 = |E| - |V| + 2$ Flächen.

Nicht zusammenhängende Graphen

Korollar Allgemeine Eulersche Polyederformel

Sei $G = (V, E)$ planar mit k ZHKs. Dann besitzt ein ebenes Diagramm von G genau $f = |E| - |V| + k + 1$ Flächen.

Beweis:

- Sei $G[V_1] = (V_1, E_1), \ldots, G[V_k] = (V_k, E_k)$ die ZHKs.
- Für jedes ebene Diagramm von $G[V_i]$ gilt $f_i = |E_i| - |V_i| + 2$.
- Dabei wird die Außenfläche für jede ZHK gezählt. D.h.

$$\begin{aligned} f &= \left(\sum_{i=1}^{k} |E_i| - |V_i| + 2\right) - (k-1) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} |E_i| - \sum_{i=1}^{k} |V_i|\right) + 2k - k + 1 = |E| - |V| + k + 1. \end{aligned}$$

Kriterium für nicht-planare Graphen

Satz Anzahl Kanten in planaren Graphen

Für jeden planaren Graphen $G = (V, E)$ gilt $|E| \leq 3(|V| - 2)$.

Beweis:

- Wir bezeichnen mit $R = \{r_1, \ldots, r_f\}$ die Flächen von G.
- Definieren Relation $A = \{(e, r) \in E \times R \mid e \text{ ist in Fläche } r\}$.
- Dabei ist eine Kante e auch in r, falls sie r begrenzt.
- Prinzip des doppelten Abzählens:
  - Zeilensumme: Jedes e begrenzt höchstens zwei Flächen, d.h. $|A| \leq 2|E|$.
  - Spaltensumme: Jede Fläche wird von mindestens 3 Kanten begrenzt, d.h. $|A| \geq 3f$.
- Daraus folgt $3f = 3(|E| - |V| + 2) \leq 2|E|$ bzw. $|E| \leq 3(|V| - 2)$.

Für planare G ohne Kreise der Länge 3 folgt sogar die Ungleichung

$$4(|E| - |V| + 2) \leq 2|E| \;\Leftrightarrow\; |E| \leq 2(|V| - 2).$$

Nicht-planare Graphen

Korollar K_5 und $K_{3,3}$

Die Graphen K_n, $n \geq 5$ und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Beweis:

- Der K_n besitzt $\binom{n}{2}$ Kanten.
- Es gilt $\binom{n}{2} \geq 3(n-2)$ für $n \geq 5$.

- Zeigen: Bipartite Graphen besitzen keine Kreise der Länge 3.
- **Annahme:** $K_{n,n'}$ besitzt Kreis $K = (v_1, v_2, v_3)$ der Länge 3.
- v_1 und v_3 sind in derselben Knotenpartition von $K_{n,n'}$.
- Daher kann keine Kante $\{v_3, v_1\}$ existieren (Widerspruch).
- Damit gilt für den $K_{3,3}$ die stärke Schranke $|E| \leq 2(|V| - 2)$.
- Für den $K_{3,3}$ folgt aber $|E| = 9 > 2 \cdot 4 = 2(|V| - 2)$.