

Satz von Kuratowski

Definition Unterteilung eines Graphen

Sei $G = (V, E)$ und $e = \{u, v\} \in E$.

- 1 Das Einfügen eines neuen Knoten w in die Kante e führt zum Graphen $G' = (V \cup \{w\}, E \setminus e \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\})$.
- 2 Der Graph $H = (V', E')$ heißt *Unterteilung von G* , falls H aus G durch Einfügen von Knoten konstruiert werden kann.

Satz von Kuratowski

Ein Graph $G = (V, E)$ ist planar gdw G keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ als schwachen Teilgraphen enthält.

Grad eines Knoten in planaren Graphen

Satz Knoten kleinen Grads

Sei $G = (V, E)$ planar. Dann existiert $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$.

Beweis:

- **Annahme:** $\deg(v) \geq 6$ für alle $v \in V$.
- Dann folgt $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6|V|$ bzw. $|E| \geq 3|V|$.
(Widerspruch: $|E| < 3(|V| - 2)$)

Färben von Knoten eines Graphen

Definition k -Färbbarkeit und chromatische Zahl

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. G heißt k -färbbar, falls es eine Abbildung $c : V \rightarrow [k]$ gibt mit $c(u) \neq c(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$. Die *chromatische Zahl* von G ist definiert als $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar.}\}$

Bsp:

- Jeder Graph mit n Knoten ist n -färbbar.
- Die chromatische Zahl des K_n ist n .
- Jeder Kreis der Form C_{2n} ist 2-färbbar.
- Jeder Kreis der Form C_{2n+1} ist 3-färbbar.
- Bipartite Graphen $K_{n,n'}$ sind 2-färbbar.
- Jeder Baum ist 2-färbbar.

Anwendungen:

- Verteilen von Senderfrequenzen
- Färben von Landkarten

Bipartite Graphen

Satz 2-Färbbarkeit und Kreise

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. G ist 2-färbbar gwd G keine Kreise ungerader Länge enthält.

Beweis:

- " $\Rightarrow$ ": **Annahme:** G enthält Kreis $K = (v_1, \dots, v_{2k+1})$.
- Sei $c : V \rightarrow [2]$ eine 2-Färbung von G .
- Dann gilt $c(v_1) = c(v_3) = \dots = c(v_{2k+1})$, aber $\{v_{2k+1}, v_1\} \in E$.
(Widerspruch: c ist eine Färbung.)
- " $\Leftarrow$ ": Starte BREITENSUCHE in beliebigem $s \in V$.
- Definiere Färbung $c : V \rightarrow [2]$ mit $c(v) = (d[v] \bmod 2) + 1$.
- c ist eine 2-Färbung für den durch die Breitensuche definierten Baum mit den Kanten $\{v, \text{pred}[v]\}$ für alle $v \in V, v \neq s$.
- Alle weiteren Kanten in G schließen Kreise gerader Länge.
- D.h. alle benachbarten Knoten erhalten unterschiedliche Farben.

5-Färbbarkeit

Satz von Heawood

Sei $G = (V, E)$ planar. Dann ist G ein 5-färbbarer Graph.

Beweis: per Induktion über $|V|$

- **IV:** Satz ist für $|V| \leq 5$ sicherlich korrekt.
- **IS** $|V| - 1 \rightarrow |V|$: Betrachten ebenes Diagramm von $G = (V, E)$.
- G enthält einen Knoten v mit $\deg(v) \leq 5$.
- Nach IS existiert für $G[V \setminus \{v\}]$ eine 5-Färbung c .

Fall 1: G besitzt höchstens 4 Nachbarn. Dann kann v mit einer Farbe gefärbt werden, die für keinen der Nachbarn verwendet wird.

Fall 2: G besitzt 5 Nachbarn $v_1, \dots, v_5$ mit $\{c(v_1), \dots, c(v_5)\} \neq [5]$. Dann kann v mit einer Restfarbe gefärbt werden.

Fall 3: G besitzt 5 Nachbarn $v_1, \dots, v_5$ mit Farben $c(v_i) = i$ für $i \in [5]$.
Idee: Färbe einen der Nachbarn von v um. (s. nächste Folie)

Fall 3: Alle Nachbarn unterschiedlich gefärbt.

- Definieren $V_i = \{v \in V \mid c(v) = i\}$.
- Fall 3(a): v_1 und v_3 sind in verschiedenen ZHKs von $G[V_1 \cup V_3]$.
- Tausche Farben 1 und 3 in der ZHK von $G[V_1 \cup V_3]$ in der v_1 liegt.
- Danach besitzt kein Nachbar von v Farbe 1. Färbe $c(v) = 1$.
- Fall 3(b): v_1 und v_3 liegen in derselben ZHK von $G[V_1 \cup V_3]$.
- Dann existiert ein v_1 - v_3 Pfad ausschließlich mit Farben 1 und 3.
- Damit existiert kein v_2 - v_4 Pfad mit den Farben 2 und 4, da dieser wegen der Planarität Knoten des v_1 - v_3 Pfades kreuzen muss.
- Vertausche analog zu Fall 3(a) die Farben 2 und 4 in der ZHK von $G[V_2 \cup V_4]$, in der v_2 liegt. Färbe v mit Farbe 2.

Satz Vierfarbensatz von Appel, Haken (1977)

Sei G planar. Dann ist G ein 4-färbbarer Graph.

Bemerkungen:

- Beweis der Korrektheit durch massiven Computereinsatz.
- Beweis liefert $\mathcal{O}(|V|^2)$ -Algorithmus für planare Graphen.
- Für allgemeine Graphen $G = (V, E)$ gibt es vermutlich keinen effizienten Algorithmus, der für gegebenes k entscheidet, ob $\chi(G) \leq k$.

Nicht-optimale Färbung

Algorithmus GREEDY-FÄRBUNG

EINGABE: $G = ([n], E)$

① $c[1] \leftarrow 1; C \leftarrow 1$

② For $i \leftarrow 2$ to n

- ▶ $c[i] = \min_{k \in \mathbb{N}} \{k \neq c[v] \text{ für alle bereits gefärbten } v \in \Gamma(i)\}.$
- ▶ If $(c[i] > C) C \leftarrow c[i];$

AUSGABE: Färbung $c : V \rightarrow [C]$

- **Korrektheit:** c ist Färbung, da alle Nachbarknoten verschiedene Farben erhalten.
- **Laufzeit:** $\mathcal{O}(|V|)$ Iterationen.
- **Güte der Lösung:** Sei $\Delta(G) = \max_v \{\deg(v_i)\}.$
- Es gilt $\chi(G) \leq C \leq \Delta(G) + 1.$
- Für K_n oder C_{2n+1} gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1.$
- Für alle andere Graphen gibt es einen effizienten Algorithmus, der eine Färbung mit höchstens $\Delta(G)$ Farben liefert.

Kantenfärbung von Graphen

Definition Kantenfärbung

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *Kantenfärbung* von G ist eine Abbildung $c : E \rightarrow [k]$ mit $c(e) \neq c(e')$ für $e, e' \in E$ mit $e \cap e' \neq \emptyset$. Der *chromatische Index* ist $\chi'(G) = \min_{k \in \mathbb{N}} \{ G \text{ besitzt } k\text{-Kantenfärbung} \}$.

- Es ist leicht zu sehen, dass $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
- Der sogenannte Satz von Vinzing zeigt, dass $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Das Problem zu entscheiden ob $\chi'(G) = \Delta(G)$ ist, gehört zu den algorithmisch schweren Problemen.
- Es gibt allerdings einen Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$ eine k -Kantenfärbung berechnet mit $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq k \leq \Delta(G) + 1$.