

Nicht-Anwendbarkeit des Master- Theorems

Beispiel:

- Betrachten die Rekursionsgleichung $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$.
- Es gilt sicherlich $f(n) = \Omega(n^{\log_b a}) = \Omega(n)$, aber **nicht**
$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}).$$
- Man beachte, dass $\frac{f(n)}{n} = \log n = o(n^\epsilon)$ für jedes $\epsilon > 0$.
- Damit ist Fall 3 nicht anwendbar.
- Fälle 1 und 2 sind nicht anwendbar, da $f(n) = \omega(n)$.
- D.h. es existieren Lücken zwischen den Fällen 1 und 2 bzw. zwischen den Fällen 2 und 3.

Beweis des Master-Theorems

Wir treffen die vereinfachte Annahme $n = b^j$.

Lemma Iterieren der Rekursionsgleichung

Sei $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ und $T(1) = \Theta(1)$. Dann gilt

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) &= a\left(aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + f\left(\frac{n}{b}\right)\right) + f(n) = a^2 T\left(\frac{n}{b^2}\right) + af\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \\ &= a^3 T\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right) + af\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \\ &\vdots \\ &= a^{\log_b n} T\left(\frac{n}{b^{\log_b n}}\right) + \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \\ &= \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \end{aligned}$$

Interpretation des Master-Theorems

- Wir betrachten den Rekursionsbaum von $T(n)$
- Die Wurzel besitzt Kosten $f(n)$ und a Kinder mit Kosten $f\left(\frac{n}{b}\right)$.
- Jedes dieser Kinder besitzt a Kinder mit Kosten $f\left(\frac{n}{b^2}\right)$.
- D.h. in Tiefe 2 sind a^2 Kinder mit Kosten insgesamt $a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right)$.
- In Tiefe i sind damit allgemein a^i Kinder mit Kosten $a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$.
- In den inneren Knoten entstehen Kosten beim Aufsplitten in Subprobleme und beim Zusammensetzen der Lösungen.
- Es existieren $n^{\log_b a}$ Blätter in Tiefe $i = \log_b n$.
- Die Kosten der Blätter sind Kosten zum Lösen der Subprobleme.

Master-Theorem: Gesamtkosten werden je nach Fall dominiert von

- 1 Kosten in den Blättern: $\Theta(n^{\log_b a})$
- 2 gleichverteilt über alle Ebenen: $\Theta(n^{\log_b a}) \cdot \log_b n = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
- 3 Kosten in der Wurzel: $\Theta(f(n))$

Beschränken der Summe

Lemma Summation im Master-Theorem

Sei $g(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$. Dann gilt

- ❶ **Fall 1** $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$, $\epsilon > 0$: $g(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- ❷ **Fall 2** $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$: $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
- ❸ **Fall 3** $a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$ für ein $c < 1$: $g(n) = \Theta(f(n))$.

Folgerung:

Mit vorigem Lemma folgern wir für die Fälle des Master-Theorems

- ❶ **Fall 1:** $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + g(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- ❷ **Fall 2:** $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
- ❸ **Fall 3:** $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + g(n) = \Theta(f(n))$
wegen $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$.

Beweis des Lemmas

Beweis:

- Wir beweisen hier nur Fall 2 & 3, Fall 1 ist Übungsaufgabe.

- **Fall 2:** Es gilt $g(n) = \Theta\left(\sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$ mit

$$\sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a} \sum_{i=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i = n^{\log_b a} \cdot \log_b n.$$

- **Fall 3:** $g(n) \geq \sum_{i=0}^0 a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Omega(f(n)).$
- Aus $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ folgt $a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) \leq c^i f(n).$
- Hieraus folgt wiederum

$$g(n) \leq \sum_{i=0}^{\log_b n-1} c^i f(n) \leq f(n) \sum_{i=0}^{\infty} c^i = f(n) \cdot \frac{1}{1-c} = \mathcal{O}(f(n)).$$

Lineare Rekursionsgleichungen

Definition Lineare Rekursionsgleichung

Seien $a_1, \dots, a_{k+1}, c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{Z}$. Die Gleichung $x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} + a_{k+1}$, $n \geq k$ mit den Anfangsbedingungen $x_i = c_i$ für $i \in [k]$ heißt *lineare Rekursionsgleichung k -ter Ordnung*. Wir bezeichnen die Rekursionsgleichung als *homogen* falls $a_{k+1} = 0$.

Beispiel:

- Sei $x_n = ax_{n-1}$ für $n \geq 1$ und $x_0 = b_0$.
- Iteration liefert $x_n = a^2 x_{n-2} = \dots = a^n x_0 = a^n b_0$.
- Anwendung: Verzinse 1000€ mit jährlich 4%.
- Nach n Jahren besitzt man $x_n = (1,04)x_{n-1}$ € mit $x_0 = 1000$ €.
- D.h. man besitzt $x_n = (1,04)^n \cdot 1000$ €.

Inhomogene Rekursion 1. Ordnung

Satz Rekursion 1. Ordnung

Sei $x_n = ax_{n-1} + b_1$ und $x_0 = b_0$. Dann gilt

$$x_n = \begin{cases} a^n b_0 + b_1 \frac{a^n - 1}{a - 1} & \text{falls } a \neq 1 \\ b_0 + b_1 n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis:

- Mit Iterationsmethode erhalten wir

$$\begin{aligned} x_n &= ax_{n-1} + b_1 = a(ax_{n-2} + b_1) + b_1 = a^2 x_{n-2} + b_1(1 + a) \\ &= a^3 x_{n-3} + b_1(1 + a + a^2) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$= a^n b_0 + b_1 \sum_{i=0}^{n-1} a^i$$

- Es gilt $\sum_{i=0}^n a^i = \begin{cases} \frac{a^n - 1}{a - 1} & \text{für } a \neq 1 \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$

Formale Potenzreihen und Erzeugende Funktion

Rekursionsgleichungen beschreiben Folgen $(x_n)_{n \geq 0} = x_0, x_1, x_2, \dots$

Definition Potenzreihe und Erzeugende Funktion

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge. Wir bezeichnen $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ als *formale Potenzreihe* bzw. als *Erzeugende Funktion* der Folge.

Den Koeffizienten a_n von x^n in $A(x)$ bezeichnen wir mit $[x^n]A(x)$.
Wir definieren $a_n = 0$ für $n < 0$.

Anmerkung:

- **Ziel:** Wir suchen eine geschlossene Darstellungen für
 - ▶ $A(x)$ als Funktion von x und
 - ▶ a_n als Funktion von n .
- Mit geschlossenen Darstellungen lässt sich einfach rechnen.

Linearkombinationen von Potenzreihen:

- Seien $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ Folgen und c, d Konstanten.
- Wir definieren $(c_n)_{n \geq 0}$ vermöge

$$c_n = ca_n + db_n \text{ für alle } n \geq 0.$$

- Es gilt für die Erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n \geq 0} (ca_n + db_n)x^n \\ &= c \sum_{n \geq 0} a_n x^n + d \sum_{n \geq 0} b_n x^n = cA(x) + dB(x). \end{aligned}$$

Multiplikation von Potenzreihen

Multiplikation von Potenzreihen:

- Seien $A(x), B(x)$ erzeugende Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

- Dies entspricht der Folge $(c_n)_{n \geq 0}$ mit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.
- $(c_n)_{n \geq 0}$ heißt Faltung oder Konvolution von $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$.

Spezialfälle der Multiplikation:

- Sei $B(x) = x^m$. Erhalten $c_n = a_{n-m}$, d.h. $c_m = a_0, c_{m+1} = a_1, \dots$
- Liefert eine Verschiebung der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ um m nach rechts.
- Dabei füllen wir die Folge von links mit Nullen auf.
- Mit $B(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$ gilt $c_n = \sum_{k=0}^n a_k$. (Kumulative Summe)
- Dies liefert die Summe der ersten n Folgenglieder von $(a_n)_{n \geq 0}$.

Die geometrische Reihe

Definition Geometrische Reihe

Die erzeugende Funktion der Einserfolge $1, 1, 1, \dots$ heißt *geometrische Reihe* $G(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$.

Anmerkung: Zusammenhang zur endlichen geometrischen Reihe.

- Wir subtrahieren von der Einserfolge die um m nach rechts verschobene Einserfolge

$$\begin{aligned} G(x) - x^m G(x) &= \sum_{n \geq 0} x^n - \sum_{n \geq 0} x^{n+m} \\ &= \sum_{n \geq 0} x^n - \sum_{n \geq m} x^n = \sum_{n=0}^{m-1} x^n. \end{aligned}$$

- Entspricht der Folge $1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots$ mit genau m Einsen.
- $\sum_{n=0}^{m-1} x^n$ ist die endliche geometrische Reihe mit m Elementen.

Einfache Operationen auf Potenzreihen

Operationen auf Potenzreihen:

- **Verschieben** nach links: $a_0, a_1, a_2, \dots \mapsto a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$

- Realisierung als formale Potenzreihe

$$\frac{A(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{m-1} x^{m-1}}{x^m} = \sum_{n \geq m} a_n x^{n-m} = \sum_{n \geq 0} a_{n+m} x^n.$$

- **Alternieren:** $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \mapsto a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots$

- Realisierung als formale Potenzreihe

$$A(-x) = \sum_{n \geq 0} a_n (-x)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n.$$

- **Index-Koeffizienten:** $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \mapsto a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots$

- Realisierung als formale Potenzreihe

$$\frac{d}{dx} A(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n.$$