Das Zweikinderproblem

Definition Zweikinderproblem

Eine Familie besitzt zwei Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit Pr[“Beide Kinder sind Mädchen.”|“Eines der Kinder ist ein Mädchen”]?

Lösung:

- Sei $A =$“Beide Kinder sind Mädchen.”
- Sei $B =$“Eines der Kinder ist ein Mädchen.”
- Wir betrachten den Wsraum $\Omega = \{MM, JM, MJ, JJ\}$.
- Wir treffen die Laplace Annahme, dass $\Pr[\omega] = \frac{1}{4}$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Es gilt $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] = \frac{|\{MM\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$.
- Wegen $\Pr[B] = \frac{|\{MM,JM,MJ\}|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$ folgt $\Pr[A|B] = \frac{1}{3}$.
- D.h. das zweite Kind ist ein Mädchen mit Ws $\frac{1}{3}$.

- **Vorsicht:** Für $B' =$ “Das ältere Kind ist ein Mädchen” gilt
$$\Pr[B'] = \frac{1}{2} \text{ und damit } \Pr[A|B'] = \frac{1}{2}.$$
- Analog erhalten wir $\Pr[A|B] = \frac{1}{2}$ mit $\Omega' = \{MM, JM, JJ\}$.

Multiplikationssatz

Satz Multiplikationssatz

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse mit $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0$. Dann gilt
$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \ldots \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$.

Beweis:

- Es gilt $0 < \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] \leq \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}] \leq \ldots \leq \Pr[A_1]$.
- n-malige Anwendung der Definition für bedingte Ws führt zu

$$\Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$$

$$= \frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \ldots \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]}.$$

- Kürzen liefert $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$.

Geburtstagsproblem

Definition Geburtstagsproblem

Gegeben: m Personen
Gesucht: Ws, dass ≥ 2 Personen denselben Geburtstag haben

Lösung:

- Wir werfen nacheinander m Bälle in $n = 365$ Urnen.
- Definieren $\bar{A} =$"In einer Urne liegen mindestens 2 Bälle."
- Dann gilt $A =$"Alle Bälle liegen allein in einer Urne."
- Sei $A_i =$"Ball i liegt allein in einer Urne."
- Dann gilt $\Pr[A] = \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_m]$. Der Multiplikationssatz liefert
$$\Pr[A] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2 | A_1] \cdot \ldots \Pr[A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}].$$
- Für $j \in [m]$ gilt $\Pr[A_j | A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1}] = \frac{n-(j-1)}{n} = 1 - \frac{j-1}{n}$, da der j-te Ball in einer der $n - (j-1)$ freien Urnen landen muss.

Geburtstagsproblem: Abschätzen der Ws

Lösung: Fortsetzung

- Wir erhalten $\Pr[A] = \prod_{j=1}^{m} \Pr[A_j | A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1}] = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)$.
- Die Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ liefert
$$\Pr[A] \leq \prod_{j=1}^{m} e^{-\frac{j-1}{n}} = e^{-\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{m-1} j} = e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}.$$
- Damit erhalten wir $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A] \geq 1 - e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}$.
- D.h. wir erhalten eine konstante Ws $\Pr[\bar{A}]$ für $m = \Theta(\sqrt{n})$.

Anwendung: Kryptographische Hashfunktion $H : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^n$.

- Wir werten H für verschiedene Urbilder $x_1, \ldots, x_m$ aus.
- Benötigen $m = \Theta(\sqrt{n})$ für eine Kollision $x_i \neq x_j$ mit $H(x_i) = H(x_j)$.

Satz von der totalen Ws

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei Ω ein Wsraum mit paarweise disjunkten $A_1, \ldots, A_n \in \Omega$ und $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann gilt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Beweis:

- Aus $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ folgt $B = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$.
- A_i sind paarweise disjunkt, d.h. $B \cap A_i$ sind paarweise disjunkt.
- Aus dem Additionssatz folgt

$$\Pr[B] = \Pr[B \cap A_1] + \ldots + \Pr[B \cap A_n] =$$
$$\Pr[B] \cdot \Pr[B|A_1] + \ldots + \Pr[B] \cdot \Pr[B|A_n].$$

Korollar zum Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Für alle $A, B \in \Omega$ gilt $\Pr[B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] + \Pr[B|\bar{A}] \cdot \Pr[\bar{A}]$.

Das Ziegenproblem

Definition Ziegenproblem

In einer Quizshow mit drei verschlossenen Türen stehen hinter 2 Türen eine Ziege, hinter der dritten Tür ein Auto.

1. Ein Kandidat K wählt eine der drei Türen aus.
2. Der Quizmaster öffnet eine Tür mit einer Ziege.
3. Der Kandidat darf nun die Tür wechseln.

Frage: Soll der Kandidat bei seiner Tür bleiben oder wechseln?

Lösung:

- Uns interessiert $\Pr[G]$ für $G =$"Kandidat gewinnt bei Türwechsel."
- Wir betrachten das Ereignis $A =$"K wählt in Schritt 1 das Auto aus."
- Es gilt $\Pr[G|A] = 0]$ und $\Pr[G|\bar{A}] = 1$.
- Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit liefert
$$\Pr[G] = \Pr[G|A] \cdot \Pr[A] + \Pr[G|\bar{A}] \cdot \Pr[\bar{A}] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$
- D.h. K gewinnt beim Türwechsel mit Ws $\frac{2}{3}$, sonst nur mit Ws $\frac{1}{3}$.

Satz von Bayes

Satz von Bayes

Sei Ω ein Wsraum mit $A_1, \dots, A_n$ und $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$, $\Pr[B] > 0$.
Dann gilt $\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}$ für alle $i \in [n]$.

Beweis:

- Folgt direkt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Korollar zum Satz von Bayes

Sei $\Pr[B] > 0$. Dann gilt $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[B|A] \cdot \Pr[A]}{\Pr[B]}$.

Anmerkung:

- Der Satz von Bayes erlaubt ein Vertauschen der Bedingung.
- D.h. anstatt A_i unter der Bedingung B betrachtet man B unter der Bedingung aller A_j.

Anwendung: Fehlerhafter Datenkanal

Anwendung:

- Über einen fehlerhaften Datenkanal werden Bits 0,1 gesendet.
- Sei S_i =“Bit i wird gesendet” mit $\Pr[S_0] = \frac{3}{10}$ und $\Pr[S_1] = \frac{7}{10}$.
- Sei R_i =“Bit i wird empfangen” mit $\Pr[R_1|S_0] = \frac{3}{10}$, $\Pr[R_0|S_1] = \frac{1}{10}$.
- Wir erhalten einen Übertragungsfehler mit Ws
  $\Pr[S_0 \cap R_1] + \Pr[S_1 \cap R_0] = \Pr[R_1|S_0] \cdot \Pr[S_0] + \Pr[R_0|S_1] \cdot \Pr[S_1] = \frac{16}{100}$.
- Wir empfangen eine Eins mit der Ws
  $\Pr[R_1] = \Pr[R_1|S_0] \cdot \Pr[S_0] + \Pr[R_1|S_1] \cdot \Pr[S_1] = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{72}{100}$.
- Falls eine 0 empfangen wird, wurde eine 0 gesendet mit Ws

$$\Pr[S_0|R_0] = \frac{\Pr[R_0|S_0] \cdot \Pr[S_0]}{\Pr[R_0]} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{28}{100}} = \frac{75}{100}.$$

Würfel sind erinnerungslos

Motivation: Unabhängigkeit

- Wir würfeln zweimal, d.h. $\Omega = [6]^2$ mit $\Pr[\omega] = \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Sei $A_i =$"Augenzahl in Wurf i ist gerade."
- A_2 sollte unabhängig von A_1 sein, d.h. $\Pr[A_2|A_1] = \Pr[A_2]$.
- Wir rechnen nach, dass $A_1 \cap A_2 = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$ und damit

$$\Pr[A_2|A_1] = \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[A_2].$$

Definition Unabhängigkeit

Definition Unabhängigkeit

Sei Ω ein Wsraum mit $A, B \in \Omega$. Wir nennen A und B *unabhängig* falls

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Anmerkung:

- Für $\Pr[B] > 0$ gilt $\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$.
- D.h. Eintreffen von B hat keinen Einfluss auf das Eintreffen von A.

Bsp: Szenario wie auf der Folie zuvor

- Sei $B =$"Summe der Augenzahlen beträgt 7."
- Es gilt $A_1 \cap B = \{(2,5),(4,3),(6,1)\}$ und
$$\Pr[B] = \frac{|\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}.$$
- D.h. $\Pr[A_1 \cap B] = \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$.
- Damit sind die Ereignisse A_1 und B unabhängig.