Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Sei $(V, \preceq)$ ein Verband. Beweise die Absorbtions- und Idempotenzgesetze, d.h. für all $x, y \in V$ gilt:

a) $x \wedge x = x \vee x = x$ und
b) $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

a) Bestimme die Anzahl der Automorphismen für einen Pfad $P_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{\{i, i+1\} : i = 1, \ldots, n-1\}$.
b) Bestimme die Anzahl der Automorphismen für den Sterngraph $S_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{\{1, i\} : i = 2, \ldots, n\}$.
c) Bestimme die Anzahl der Automorphismen für einen Kreis $C_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{\{i, i+1\} : i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Für einen Graphen $G = (V, E)$ bezeichne $G^c := \big(V, \binom{V}{2} \setminus E\big)$ den komplementären Graphen. Ein Graph ist genau dann asymmetrisch, wenn die Identität der einzige Automorphismus ist.

Beweise: G asymmetrisch $\Leftrightarrow$ G^c asymmetrisch.

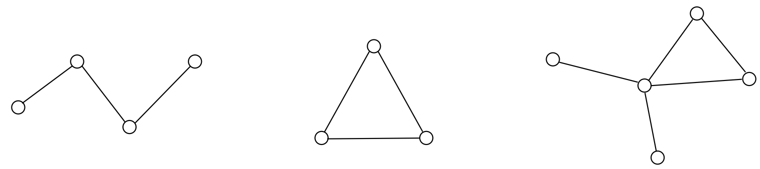
Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Sei $T = (G, E)$ ein Baum mit $n \geq 2$ Knoten. Sei q_i die Anzahl der Knoten von T die den Grad i haben. Beweise oder widerlege die folgende Behauptung:

$$q_1 - q_3 - 2q_4 - 3q_5 - \ldots - (n-3)q_{n-1} = 2.$$

Präsenzaufgabe 3.5

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Automorphismus von G ist ein Isomorphismus von G auf sich selbst, d.h. eine Bijektion $f : V \to V$, so dass $\{u, v\} \in E$ genau dann wenn $\{f(u), f(v)\} \in E$. Bestimme die Anzahl der Automorphismen für die folgenden Graphen:



Präsenzaufgabe 3.6

Ein Graph heisst asymmetrisch wenn die Identität der einzige Automorphismus von G ist. Gib einen asymmetrischen Graphen mit Knotenanzahl $n = 6$ an. Hinweis: Es gibt genau 8 Stück.

Präsenzaufgabe 3.7

Beweise: Wenn ein Baum genau $k \geq 1$ Knoten vom Grad 4 enthält, dann besitzt der Baum mindestens $2k + 2$ Blätter.