Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge $M = \{1, \dots, n\}$. Gesucht ist eine kreisförmige Anordnung der Elemente aus M (jedes Element darf mehrmals verwendet werden), so dass jedes Element $i \in M$ genau einmal in der Kreisordnung zu jedem Element $j \in M$ ($i \neq j$) benachbart ist.

- Für welche $n \in \mathbb{N}$ besitzt dieses Problem eine Lösung?
- Gib eine konkrete Lösung für das kleinste $n \geq 6$ an, für das eine Lösung existiert.

Wir betrachten im Folgenden eine Verallgemeinerung des Hyperwürfels, in dem wir die Knoten nicht nur binär kodieren, sondern mit einem beliebigen Stellenwertsystem und Kanten erneut zwischen je zwei Knoten einfügen, die sich in genau einer der Stellen unterscheiden. Wir definieren dazu:

$$Q_{s,d} := (\{0, \dots, s-1\}^d, \{\{a, b\} : |\{i : a_i \neq b_i\}| = 1\})$$

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

- Für welche d, s ist $Q_{s,d}$ eulersch?
- Ist $Q_{3,2}$ planar?

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

- Fasst man die Elemente aus $\{0, 1, 2\}^2$ als Stellenwertsystem auf, wird durch die Ordnung der natürlichen Zahlen eine Ordnung auf der Knotenmenge induziert. Welche Färbung ergibt sich, wenn der in der Vorlesung vorgestellte Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus mit dieser Knotenreihenfolge auf $Q_{3,2}$ angewendet wird?
- Ist diese Färbung optimal?

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

Beweise: Jeder Baum $T = (V, E)$ besitzt höchstens ein perfektes Matching.

Tipp: Nehme an, dass zwei perfekte Matchings M_1 und M_2 existieren und betrachte die symmetrische Differenz $M_1 \oplus M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$.

Präsenzaufgabe 5.5

Für welche $d \geq 2$ ist Q_d eulersch?

Präsenzaufgabe 5.6

- Gib eine Färbung des Q_3 an, die mit dem Greedy-Algorithmus ermittelt wird, der beim Knoten 000 beginnt und in der Reihenfolge der Nummerierung vorgeht.
- Beweise oder widerlege: Für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt: Q_d ist bipartit.

Präsenzaufgabe 5.7

- Beweise oder widerlege: Der vollverbundene Graph K_6 ist planar.
- Drei verschiedene Versorgungsunternehmen (Gas, Wasser, Strom) versorgen einen Straßenzug mit 10 Häusern. Geht dies, ohne dass sich die Rohre überkreuzen?

Präsenzaufgabe 5.8

- Wieviele perfekte Matchings hat ein Pfad mit $n \geq 2$ Knoten?
  - Wieviele perfekte Matchings hat ein Kreis mit n Knoten?
  - Wieviele Matchings/perfekte Matchings/maximum Matchings hat ein Stern mit n Knoten?
  - Für welche $n \geq 2$ kann man einen Graphen G mit n Knoten angeben bei dem jedes maximum Matching auch ein perfektes Matching ist?
-