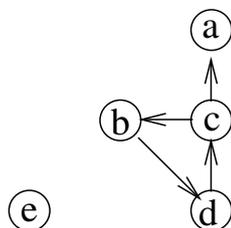


**Aufgabe 6.1 (4 Punkte)**

Berechne mit Hilfe des Algorithmus von Warshall die transitive Hülle des folgenden Graphen:



Gib dazu nach jeder Iteration der Hauptschleife die Matrix  $W[i, j]$  an.

**Aufgabe 6.2 (4 Punkte)**

Beweise: Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  ist genau dann ein DAG, wenn eine topologische Sortierung von  $V$  existiert, d.h. es gibt (mindestens) eine Abbildung  $d : V \rightarrow \mathbb{N}$ , so dass für alle  $(u, v) \in E$  gilt, dass  $d(u) < d(v)$ .

**Aufgabe 6.3 (4 Punkte)**

Eine natürliche Zahl  $z$  sei gegeben durch ihre Dezimaldarstellung  $a_k \dots a_1 a_0$ . Ihre *Quersumme* ist definiert durch  $a_0 + a_1 + \dots + a_k$ , ihre *alternierende Quersumme* durch  $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k$ .

Beweise oder widerlege:

- a) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 9 teilbar wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
- b) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 11 teilbar wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

**Aufgabe 6.4 (4 Punkte)**

Löse die lineare Kongruenz

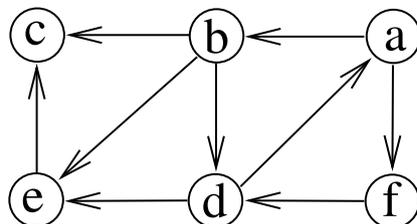
$$1234 \cdot x \equiv 110 \pmod{654321}$$

und führe die Berechnung detailliert aus.

---

### Präsenzaufgabe 6.5

Wir betrachten den folgenden gerichteten Graphen:



- Ist dieser Graph ein DAG, stark/schwach zusammenhängend?
- Gib die Zusammenhangskomponenten von  $G$  an.
- Betrachte  $G' = (V, E \setminus \{(d, a)\})$ . Gib eine topologisch sortierte Liste der Knoten aus.

### Präsenzaufgabe 6.6

- Gib Beispiele für  $a \neq b$  an, so dass die Kongruenz  $a \cdot x \equiv b \pmod{35}$  in  $\mathbb{Z}_{35}$ 
  - keine Lösung
  - mehrere Lösungenbesitzt.
- Äußere einen Verdacht, unter welchen Bedingungen (für beliebige  $\mathbb{Z}_m$ ) Fall (i) bzw. (ii) eintritt. Begründe!

### Präsenzaufgabe 6.7

- Berechne den ggT von 40 und 97 mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus und bestimme das Inverse Element von 40 modulo 97.
- Löse die lineare Kongruenz

$$40 \cdot x \equiv 3 \pmod{97}$$