Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit q Elementen, wobei $K^* = \langle a \rangle$. Beweise: a^j für ein $j \in \mathbb{Z}$ ist genau dann ein Generator von K^* , wenn gilt $\text{ggT}(j, |K^*|) = 1$. (Vgl. Folien 20 vom 19.12., S.5).

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Welche Elemente sind im Ring $K[x]$ bezüglich der Multiplikation invertierbar? Ist $K[x]$ ein Körper? *Hinweis:* Es gilt $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Beweise, dass es in $K[x]$ unendlich viele über K irreduzible Polynome gibt.

Hinweis: "Kopiere" Euklids Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen.

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

Wir betrachten eine kanonische Repräsentation von $\mathbb{F}_9$, dem endlichen Körper mit 9 Elementen. *Hinweis:* Betrachte den Primkörper $\mathbb{Z}_3$ und ein über $\mathbb{Z}_3$ irreduzibles Polynom $\pi(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ vom Grad 2.

- Wie lauten die Elemente in K ?
 - Gib die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{F}_9 \setminus \{0\}, \cdot)$ an.
 - Wieviele Generatoren besitzt K ?
-

Präsenzaufgabe 10.5

Sind die Polynome $x^2 + 1$, $x^2 + x + 2$ reduzibel über $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$?

Präsenzaufgabe 10.6

Wir betrachten $\pi = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

- Zeige für je zwei $f, g \in \mathbb{R}[x]$ ist $f \sim g := \pi | (f - g)$ eine Äquivalenzrelation.
- Gib ein Repräsentantensystem K für die Äquivalenzklassen an.
- Seien $[f]_\pi, [g]_\pi$ zwei solche Äquivalenzklassen. Zeige, dass durch $[f]_\pi + [g]_\pi := [f + g]_\pi$ und $[f]_\pi \cdot [g]_\pi := [f \cdot g]_\pi$ widerspruchsfrei Addition und Multiplikation auf K definiert werden können.
- Ist $(K, +, -)$ ein Körper?
- Ist π über K reduzibel?

Präsenzaufgabe 10.7

Gib die Gruppentafeln von $(\mathbb{F}_4, +)$ und $(\mathbb{F}_4 \setminus \{0\}, \cdot)$ an.