Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Löse das Scheduling Problem für kompatible Veranstaltungen (Folien vom 15.01, Seite 2) mit Hilfe von Dynamischer Programmierung. Zeige, dass ein solcher Algorithmus eine schlechtere Laufzeit hat, als der Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Zeige dass der Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung (Folien vom 15.01., Seite 8) eine optimale Lösung für das modifizierte Rucksackproblem Π'_R berechnet.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Wir wenden den Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung (Folien 15.1., Seite 8) auf das originale Rucksackproblem Π_R an und nehmen an, dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass $2w_i \leq B$.

Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen die gierig ermittelte Lösung $\{1, \dots, k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ einen Wert $\hat{p} = \sum_{i=1}^k p_j$ hat, der mindestens halb so groß ist, wie der optimale Wert von Π_R , d.h.

$$2\hat{p} \geq \max_{J \subseteq \{1, \dots, n\}} \left\{ \sum_{j \in J} p_j \mid \sum_{j \in J} w_j \leq B \right\},$$

Tipp: Nutze, dass $p' := p_1 + \dots + p_k + \frac{B - (w_1 + \dots + w_k)}{w_{k+1}} p_{k+1} \geq \hat{p}$ eine optimale Lösung für Π'_R ist und schätze $\hat{p} = p_1 + \dots + p_k$ ab.

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)

Eine Hilfsorganisation hat aus weihnachtlichen Spenden n Ladungen mit Lebensmitteln zur Verfügung. Für jede Ladung $i \in [n]$ wurde ein Nährwert $w_i \in \mathbb{N}^+$ und ein Verfalldatum $t_i \in \mathbb{N}$ ermittelt. Täglich kann nur eine Ladung in das Krisengebiet gebracht werden. Ziel der Helfer ist es, eine Auswahl $F \subseteq [n]$ von Ladungen zu treffen, so dass keine Ladung $i \in F$ nach ihrem Verfalldatum geliefert wird und der Nährwert aller gelieferten Ladungen maximiert wird.

Zeige, dass dem Problem ein Matroid zugrunde liegt.

Präsenzaufgabe 12.5

Gegeben sein ein Matroid $\mathcal{M} = (S, \mathcal{U})$ und eine Gewichtsfunktion $w : s \rightarrow \mathbb{N}$. Gesucht sei .

Gib eine Modifikation w' der Gewichtsfunktion an, so dass der aus der Vorlesung bekannte Greedy-Algorithmus mit Eingabe $(\mathcal{M}, w')$ eine Basis mit maximalem Gewicht bezüglich w als Ausgabe liefert.

Begründe Deine Wahl.

Präsenzaufgabe 12.6

Gegeben seien eine Menge von n Aufträgen. Zu jedem Auftrag gehört ein Schlusstermin $d_i \in \mathbb{N}$ und ein Gewinn $p_i \in \mathbb{N}^+$. Diese Aufträge sollen auf einer Maschine ausgeführt werden, die jeden der Aufträge in *einer* Zeiteinheit erledigen kann. Eine zulässige Lösung ist eine Auswahl $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ der Aufträge, so dass die Aufträge in A so angeordnet werden können, dass jeder dieser Aufträge bis zu seinem Schlusstermin erledigt ist. Gesucht ist eine zulässige Lösung mit maximalem Gewinn.

- Zeige, dass dem Problem ein Matroid zugrunde liegt.
- Gib den entsprechenden Greedy-Algorithmus an.

Präsenzaufgabe 12.7

Gegeben seien $n = 5$ Gegenstände mit Gewicht w_i und Profit p_i :

i	1	2	3	4	5
w_i	3	5	4	2	1
p_i	4	3	2	1	3

Berechne mit dem in der Vorlesung angegebenen Greedy-Algorithmus eine optimale Packung für das Rationale Rucksackproblem Π'_R mit $B = 10$.

Wie sieht eine Lösung des Greedy-Algorithmus für das originale Rucksackproblems Π_R ? Wie ist Ihr Wert im Vergleich zur optimalen Lösung?