Erwartungswert

Definition Erwartungswert

Der *Erwartungswert* einer diskreten ZV ist definiert als

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i i \cdot \Pr(X = i).$$

$\mathbb{E}[X]$ ist endlich, falls $\sum_i |i| \cdot \Pr(X = i)$ konvergiert, sonst unendlich.

Bsp:

- Sei X die Summe zweier Würfe eines Würfels. Dann gilt
$$\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$
- Sei X eine ZV mit $\Pr(X = 2^i) = \frac{1}{2^i}$ für $i \geq 1$. Dann gilt
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \geq 1} 2^i \cdot \frac{1}{2^i} = \infty.$$

Linearität des Erwartungswerts

Satz Linearität des Erwartungswerts

Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete ZV mit endlichem Erwartungswert. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i].$$

Beweis: Nur für $n = 2$, für allgemeine n per Induktion.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_i \sum_j (i+j) \Pr((X=i) \cap (Y=j)) \\
&= \sum_i i \sum_j \Pr((X=i) \cap (Y=j)) + \sum_j j \sum_i \Pr((X=i) \cap (Y=j))
\end{aligned}$$

- Der Satz von der totalen Ws liefert damit
$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_i i \Pr(X=i) + \sum_j j \Pr(Y=j) = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Beispiel zuvor:

- Sei X_1, X_2 ZV für 1. bzw 2. Wurf und $X = X_1 + X_2$.
- Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$ und $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 7$.

Linearität des Erwartungswerts

Lemma

Für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle diskrete ZV X gilt

$$\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X].$$

Beweis:

- Für $c = 0$ sind beide Seiten 0. Für $c \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[cX] &= \sum_j j \Pr(cX = j) \\
&= c \sum_j \frac{j}{c} \Pr\left(X = \frac{j}{c}\right) \\
&= c \sum_i i \Pr(X = i) \\
&= c\mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswerts

Lemma

Es gilt $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2$.

Beweis:

- Definiere $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2 > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2X\mathbb{E}[X]] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2. \end{aligned}$$

Eine Verallgemeinerung liefert die folgende Jensen Ungleichung.

Jensen Ungleichung

Satz Jensen Ungleichung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt $\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$.

Beweis:

- Wir nehmen an, dass f eine Taylor-Entwicklung besitzt.
- Sei $\mu = \mathbb{E}[X]$. Dann gilt $f(X) = f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu) + \frac{f''(c)(X-\mu)^2}{2}$.
- Konvexität von f is äquivalent zu $f''(c) \geq 0$. Wir erhalten
$$f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu).$$
- Anwenden des Erwartungswerts auf beiden Seiten liefert
$$\mathbb{E}[f(x)] \geq \mathbb{E}[f(\mu)] + f'(\mu)(\mathbb{E}[X] - \mu) = f(\mu) = f(\mathbb{E}[X]).$$

Bernoulli und Binomial ZV

- Betrachten ein Zufallsexperiment E, das mit Ws p erfolgreich ist.
- Definiere für $i = 1, \ldots, n$ die *Bernoulli*- bzw. *Indikator*-ZV (IV)

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } E \text{ erfolgreich} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Für alle IV Y_i gilt $\mathbb{E}[Y_i] = 0 \cdot \Pr[Y_i = 0] + 1 \cdot \Pr[Y_i = 1] = \Pr[Y_i = 1]$.
- Definiere $X = Y_1 + \ldots + Y_n$ als ZV für die Anzahl der Erfolge.

Definition Binomialverteilung

Eine ZV X ist *binomial verteilt* gemäß $B(n,p)$ falls

$$\Pr(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \text{ für } j = 0, \ldots, n.$$

Anmerkungen

- $X = j$, falls wir genau j Erfolge und $n - j$ Misserfolge erhalten.
- Ws-Verteilung: $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = (p + (1-p))^n = 1$.
- Wegen $\mathbb{E}[Y_i] = p$ gilt $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y_1] + \ldots + \mathbb{E}[Y_n] = np$.

Bedingter Erwartungswert

Definition Bedingter Erwartungswert

$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \sum_x x \cdot \Pr(X = x \mid Y = y)$.

Lemma

Für alle ZV X, Y gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_y \Pr(Y = y)\mathbb{E}[X \mid Y = y]$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_y \Pr(Y = y)\mathbb{E}[X \mid Y = y] &= \sum_x \sum_y x \Pr(X = x \mid Y = y) \Pr(Y = y) \\
&= \sum_x \sum_y x \Pr(X = x \cap Y = y) \\
&= \sum_x x \Pr(X = x) = \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

Bedingter Erwartungswert

Definition

$\mathbb{E}[X \mid Y]$ ist eine ZV in Y, die den Wert $\mathbb{E}[X|Y = y]$ für $Y = y$ annimmt.

Beispiel:

- 2-facher Münzwurf: X_1, X_2 ZV für 1. bzw. 2. Wurf und $X = X_1 + X_2$.
$$\mathbb{E}[X \mid X_1] = \sum_x \Pr(X = x \mid X_1) = \sum_{x=X_1+1}^{X_1+6} x \cdot \frac{1}{6} = X_1 + \frac{7}{2}.$$
- Es folgt $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid X_1]] = \mathbb{E}[X_1 + \frac{7}{2}] = \mathbb{E}[X_1] + \frac{7}{2} = 7 = \mathbb{E}[X]$.

Satz

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]]$

Beweis:

- Da $\mathbb{E}[X \mid Y]$ eine ZV in Y ist, folgt aus obiger Definition
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \sum_y \Pr(Y = y)\mathbb{E}[X \mid Y = y].$$
- Mit dem Lemma auf voriger Folie ist die rechte Seite gleich $\mathbb{E}[X]$.

Geometrische Verteilung

Definition Geometrische Verteilung

Eine ZV X ist *geometrisch* verteilt mit Parameter $0 < p < 1$, falls

$$\Pr(X = n) = (1-p)^{n-1} p \text{ für } n \geq 1.$$

Anmerkung:

- D.h. $X = n$ beschreibt, dass der 1. Erfolg im n-ten Versuch eintritt.

$$\sum_{i\geq 1}(1-p)^{i-1}p = p \cdot \sum_{i \geq 0}(1-p)^i = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Lemma

Sei X eine diskrete ZV, die nur nicht-negative Werte annimmt. Es gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(X \geq i).$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pr(X \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} \Pr(X = j) = \sum_{i=1}^{\infty} i \Pr(X = i) = \mathbb{E}[X].$$

Geometrische Verteilung

Für geometrisch verteilte X gilt $\Pr(X \geq i) = (1-p)^{i-1}$ und daher

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

Alternative Rechnung mittels bedingter Erwartungswerte:

- Sei Y eine IV mit $Y = 1$ für Erfolg im 1. Versuch.
- Mit dem Lemma auf Folie 25 gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \Pr(Y=0)\mathbb{E}[X \mid Y=0] + \Pr(Y=1)\mathbb{E}[X \mid Y=1] \\ &= (1-p)\mathbb{E}[X+1] + p = (1-p)\mathbb{E}[X] + 1.\end{aligned}$$

- Auflösen nach $\mathbb{E}[X]$ liefert $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$.