# Moment Erzeugendenfunktion

**Definition** Moment Erzeugendenfunktion

Die *Moment Erzeugendenfunktion* einer ZV $X$ ist $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.

**Anmerkungen:**

- Uns interessiert $M_X(t)$ für $t$ in der Nähe von Null.
- Annahme im Folgenden: Wir können die Operatoren für Erwartungswert und Ableitung vertauschen. (korrekt für alle von uns betrachteten Verteilungen)
- Sei $M_X^{(n)}(0)$ die $n$-te Ableitung von $M_X(t)$ an der Stelle $t = 0$.

**Satz** $M_X(t)$ beschreibt alle Momente von $X$

Für alle $n \geq 1$ gilt $\mathbb{E}[X^n] = M_X^{(n)}(0)$.

**Beweis:**

- Vertauschen von Ableitung und $\mathbb{E}$ liefert $M_X^{(n)}(t) = \mathbb{E}[X^n e^{tX}]$.
- Damit folgt $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$.

# Moment Erzeugendenfunktion

**Bsp:** Geometrische ZV $X$ mit Parameter $p$.

- Es gilt
  $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}pe^{tk} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}((1-p)e^t)^k.$
- Für $t < \ln(\frac{1}{1-p})$ folgt $M_X(t) = \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-(1-p)e^t} - 1\right)$.
- Ableiten nach $t$ liefert $M_X^{(1)}(t) = \frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2}$.
- Auswerten an der Stelle $t = 0$ ergibt $\mathbb{E}[X] = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$.
- Analog folgt, dass $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2-p}{p^2}$. (Übung)

**Satz** Momente einer ZV determinieren Verteilung

Seien $X$, $Y$ ZV. Falls für ein $\delta > 0$

$$M_X(t) = M_Y(t) \text{ für alle } t \in (-\delta, \delta),$$

dann besitzen $X$ und $Y$ dieselbe Verteilung.

(ohne Beweis)

# Multiplikativität der Erzeugendenfunktion

**Satz** Multiplikativität der Erzeugendenfunktion

Seien $X$, $Y$ unabhängige ZV. Dann gilt $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

**Beweis:**

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}] = M_X(t)M_Y(t) \square$$

**Anwendung:**

- Sei $M_X(t)M_Y(t)$ die Moment Erzeugendenfkt einer Verteilung $D$.
- Dann muss $D$ die Verteilung $X+Y$ sein.

**Herleitung von Chernoff Schranken:**

- Aus der Markov Ungleichung folgt für alle $t > 0$
$$\Pr(X \geq a) = \Pr(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}.$$
- Daraus folgt insbesondere $\Pr(X \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}$.
- Man wählt nun für die gewünschte Verteilung ein geeignetes $t$.
- Oft ist man an einer gut handhabbaren Schranke interessiert.

# Poisson Proben

$M_X(t)$ **für Poisson Proben:**

- Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige 0-1 ZV mit $\Pr(X_i = 1) = p_i$. (sogenannte *Poisson Proben*)
- Sei $X = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n p_i$.
- Für die Moment Erzeugendenfunktion von $X_i$ gilt
$$M_{X_i}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i}] = p_i e^t + (1 - p_i) = 1 + p_i(e^t - 1) \leq e^{p_i(e^t-1)}.$$
- Mit Hilfe der Multiplikativität von $M_X(t)$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{tX}] = M_X(t) &= \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) \\
&\leq \prod_{i=1}^n e^{p_i(e^t-1)} = e^{\sum_{i=1}^n p_i(e^t-1)} = e^{(e^t-1)\mu}.
\end{aligned}$$

# Chernoff Schranken

## **Satz** Chernoff Schranken

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Poisson Proben mit $\Pr(X_i = 1) = p_i$. Sei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $\mu = \mathbb{E}[X]$. Dann gilt

1. für alle $\delta > 0$: $\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) < \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$.
2. für $0 \leq \delta \leq 1$ : $\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}$.
3. für $R \geq 6\mu$: $\Pr(X \geq R) \leq 2^{-R}$.

**Beweis:**

- Aus der Markov Ungleichung folgt
$$\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) = \Pr(e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu)}} \leq \left(\frac{e^{(e^t-1)}}{e^{t(1+\delta)}}\right)^{\mu}.$$
- Für $\delta > 0$ können wir $t = \ln(1+\delta) > 0$ wählen. Aussage 1 folgt.
- Für Aussage 2 kann man die Ungleichung $\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}} \leq e^{-\frac{\delta^2}{3}}$ zeigen.
- Für 3. sei $R = (1+\delta)\mu$. Für $R \geq 6\mu$ folgt $1+\delta \geq 6$ und
$$\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) < \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \leq \left(\frac{e}{(1+\delta)}\right)^{(1+\delta)\mu} \leq \left(\frac{e}{6}\right)^{R} \leq 2^{-R}.$$

# Chernoff Schranken

**Satz** Chernoff Schranken (Abweichung nach unten)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Poisson Proben mit $\Pr(X_i = 1) = p_i$.
Sei $X = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu = \mathbb{E}[X]$. Dann gilt

1. für alle $\delta > 0$: $\Pr(X \leq (1-\delta)\mu) < \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}$.
2. für $0 \leq \delta \leq 1$ : $\Pr(X \leq (1-\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{2}}$.

**Beweis:** analog zum Beweis zuvor.

**Korollar** Chernoff Schranke

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Poisson Proben mit $\Pr(X_i) = p_i$.
Sei $X = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu = \mathbb{E}[X]$. Dann gilt für $0 \leq \delta \leq 1$ :

$$\Pr(|X - \mu| \geq \delta\mu) \leq 2e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}.$$

# Anwendung Chernoff

***n*-facher Münzwurf:**

- Sei $X$ die Anzahl von Köpfen bei $n$ Münzwürfen. Mit Chernoff folgt
$$\Pr(|X - \tfrac{n}{2}| \geq \tfrac{1}{2}\sqrt{6n\ln n}) \leq 2e^{-\frac{1}{3}\frac{n}{2}\frac{6\ln n}{n}} = \frac{2}{n}.$$
- D.h. die Abweichung vom Mittelwert ist meist $\mathcal{O}(\sqrt{n\ln n})$.
- Mit Chebychev hatten wir $\Pr(|X - \frac{n}{2}| \geq \frac{n}{4}) \leq \frac{4}{n}$.
- Chernoff liefert die deutlich bessere exponentielle Schranke
$$\Pr(|X - \tfrac{n}{2}| \geq \tfrac{n}{4}) \leq 2e^{-\frac{1}{3}\frac{n}{2}\frac{1}{4}} = 2e^{-\frac{n}{24}}.$$

# Chernoff: Spezialfälle

**Satz** Chernoff für $\pm 1$-ZV

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZV mit $\Pr(X_i = 1) = \Pr(X_i = (-1)) = \frac{1}{2}$.
Sei $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Für alle $a > 0$ gilt $\Pr(X \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

**Beweis:**

- Mit Taylor-Entwicklung $e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots$ gilt für alle $t > 0$
  $$\mathbb{E}[e^{tX_i}] = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \sum_{i \geq 0} \frac{t^{2i}}{(2i)!} \leq \sum_{i \geq 0} \frac{t^{2i}}{2^i i!} = \sum_{i \geq 0} \frac{(t^2/2)^i}{i!} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$
- Es folgt aus der Unabhängigkeit $\mathbb{E}[e^{tX}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}] \leq e^{\frac{t^2 n}{2}}$ und
  $$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} \leq e^{\frac{t^2 n}{2} - ta}.$$
- Setzung von $t = \frac{a}{n}$ liefert $\Pr(X \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$. $\square$

**Korollar** Chernoff für $\pm 1$-ZV

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZV mit $\Pr(X_i = 1) = \Pr(X_i = (-1)) = \frac{1}{2}$.
Sei $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Für alle $a > 0$ gilt $\Pr(|X| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

# Chernoff: Spezialfälle

**Satz** Chernoff für $0,1$-ZV

Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige ZV mit $\Pr(Y_i = 1) = \Pr(Y_i = 0) = \frac{1}{2}$. Sei $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ und $\mu = \mathbb{E}[Y] = \frac{n}{2}$. Es gilt

1. für alle $a > 0$: $\Pr(Y \geq \mu + a) \leq e^{-\frac{2a^2}{n}}$.
2. für alle $\delta > 0$: $\Pr(Y \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\delta^2 \mu}$.

**Beweis:**

- Mit der Ersetzung $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$ erhalten wir
$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i+1}{2} = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} X + \mu.$$
- Aus voriger Folie folgt $\Pr(Y \geq \mu + a) = \Pr(X \geq 2a) \leq e^{-\frac{2a^2}{n}}$.
- Mit der Setzung $a = \delta\mu$ folgt analog
$$\Pr(Y \geq (1+\delta)\mu) = \Pr(X \geq 2\delta\mu) \leq e^{-\frac{2\delta^2\mu^2}{n}} = e^{-\delta^2\mu}. \quad \square$$

**Korollar**

Wir gelten selbige Schranken für $\Pr(Y \leq \mu - a)$ und $\Pr(Y \leq (1-\delta)\mu)$.