Die Probabilistische Methode

Beobachtung: Besitzt ein Ereignis Ws > 0, so muss es existieren!

Notation: Sei K_n der komplette Graph mit n Knoten und $\binom{n}{2}$ Kanten.

Satz

Falls $2^{\binom{k}{2}-1} > \binom{n}{k}$, existiert eine 2-Kantenfärbung des K_n, so dass kein K_k Subgraph monochromatisch ist.

Beweis:

- Färbe jede Kante zufällig und unabhängig mit Ws $\frac{1}{2}$.
- Ereignis A_i: i-te Clique $K_k^{(i)}$, $i = 1, \ldots, \binom{n}{k}$, ist monochromatisch.
- $K_k^{(i)}$ besitzt $\binom{k}{2}$ Kanten. D.h. $\Pr(A_i) = \frac{1}{2^{\binom{k}{2}-1}}$.
- Mit Union Bound existiert ein monochromatischer $K_k^{(i)}$ mit

$$\Pr(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \Pr(A_i) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1.$$

- D.h. kein monochromatischer $K_k^{(i)}$ existiert mit

$$\Pr(\bigcap_{i=1}^{\binom{n}{k}} \bar{A}_i) = 1 - \Pr(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_i) > 0. \quad \Box.$$

Nicht alle kleiner als der Erwartungswert.

Lemma

Sei X eine ZV mit $\mathbb{E}[X] = \mu$. Dann gilt

$$\Pr(X \geq \mu) > 0 \text{ und } \Pr(X \leq \mu) > 0.$$

Beweis:

- Wir zeigen nur $\Pr(X \geq \mu) > 0$, $\Pr(X \leq \mu) > 0$ folgt analog.
- Angenommen $\Pr(X \geq \mu) > 0$. Wir erhalten den Widerspruch

$$\mu = \sum_x x \Pr(X = x) = \sum_{x<\mu} x \Pr(X = x) < \mu \sum_{x<\mu} \Pr(X = x) = \mu.$$

Problem Max-Cut

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$
Gesucht: Maximaler Cut $V = A \dot\cup B$

Max-Cut ist ein NP-hartes Problem.

Mindestgröße eines Max-Cuts

Satz Mindestgröße eines Max-Cuts

Jeder Graph $G = (V, E)$ besitzt einen Cut der Größe mindestens $\frac{m}{2}$.

Beweis:

- Weise jedes $v \in V$ mit jeweils Ws $\frac{1}{2}$ zu A oder B.
- Sei $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ und IV $X_i = 1$, falls e_i zum Cut beiträgt.
- Es gilt $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{2}$. Sei C ZV für die Größe des Cuts. Dann gilt
$$\mathbb{E}[C] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] = \frac{m}{2}.$$
- D.h. es existiert eine Partition $V = A \,\dot\cup\, B$ mit Cutgröße $|C| \geq \frac{m}{2}$. $\square$

Algorithmus(Las Vegas) BIG-CUT

EINGABE: $G = (V, E)$

1. REPEAT
   1. Weise jedes $v \in V$ jeweils mit Ws $\frac{1}{2}$ zu A oder B.

   UNTIL $C(A, B) \geq \frac{m}{2}$

AUSGABE: $V = A \,\dot\cup\, B$ mit Cutgröße $C \geq \frac{m}{2}$

Konstruktion eines großen Cuts

Satz Laufzeit von BIG-CUT

BIG-CUT läuft in erwarteter Zeit $\mathcal{O}(nm^2)$.

Beweis:

- Jede Zuweisung in 1.1 läuft in $\mathcal{O}(n)$.
- Die Überprüfung von $C(A, B) \geq \frac{m}{2}$ benötigt $\mathcal{O}(m)$.
- Definiere $p = \Pr(C \geq \frac{m}{2})$. Wegen $C \leq m$ gilt
  $\frac{m}{2} = \mathbb{E}[C] = \sum_{i<\frac{m}{2}} i \Pr(C = i) + \sum_{i \geq \frac{m}{2}} i \Pr(C = i) \leq (1-p)\frac{m-1}{2} + pm.$
- Auflösen nach p liefert $p \geq \frac{1}{m+1}$.
- Die Anzahl Iterationen von Schritt 1 ist geometrisch verteilt mit p.
- D.h. wir benötigen erwartet $\frac{1}{p} = \mathcal{O}(m)$ viele Iterationen. $\square$

Derandomisierung von BIG-CUT

Algorithmus DETERMINISTIC BIG-CUT

EINGABE: $G = (V, E)$

1. Setze $A = \{v_1\}$ und $B = \emptyset$.
2. FOR $i = 2$ to n
   1. Falls v_i weniger Nachbarn in A als in B besitzt, setzte $A = A \cup \{v_i\}$.
   2. Sonst setze $B = B \cup \{v_i\}$.

AUSGABE: $V = A \dot{\cup} B$ mit Cutgröße $C \geq \frac{m}{2}$

Laufzeit: $\mathcal{O}(n + m)$, d.h. linear in der Eingabe.

Korrektheit DETERMINISTIC BIG-CUT

Satz Korrektheit von DETERMINISTIC BIG-CUT

DETERMINISTIC BIG-CUT berechnet einen Cut der Größe $C \geq \frac{m}{2}$.

Beweis:

- Sei $x_i \in \{A, B\}$ die Menge, in die v_i platziert wird.
- Sei $\mathbb{E}[C|x_1, \ldots, x_k]$ die erwartete Cut-Größe nach Platzierung von $x_1, \ldots, x_k$, wobei die verbliebenen Knoten zufällig platziert werden.
- Dann gilt $\mathbb{E}[C] \geq \frac{m}{2}$ (BIG-CUT) und $\mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[C \mid x_1]$.
- Ferner gilt
$$\mathbb{E}[C \mid x_1, \ldots, x_k] = \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[C \mid x_1, \ldots, x_k, A] + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[C \mid x_1, \ldots, x_k, B].$$
- Alle Kanten, die nicht inzident zu v_{k+1} sind, tragen dasselbe zu den beiden Erwartungswerten auf der rechten Seite bei.
- DETERM. BIG-CUT wählt das Maximum beider Erwartungswerte.
- Es folgt $\mathbb{E}[C \mid x_1, \ldots, x_k] \leq \mathbb{E}[C \mid x_1, \ldots, x_{k+1}]$ für alle $0 < k < n$.
- D.h. bei Terminierung von DETERMINISTIC BIG-CUT gilt
$\mathbb{E}[C \mid x_1, \ldots, x_n] \geq \mathbb{E}[C \mid x_1, \ldots, x_{n-1}] \geq \ldots \geq \mathbb{E}[C] \geq \frac{m}{2}$. $\square$

Sample and Modify

Sample and Modify Strategie

1. Sample: Erzeuge zufällige Struktur.
2. Modify: Modifiziere, bis die gewünschte Eigenschaft erreicht ist.

Algorithmus INDEPENDENT SET

EINGABE: $G = (V, E)$ mit $|V| = n, |E| = m$

1. Setze $d = \frac{2m}{n}$ (durchschnittlicher Grad eines Knoten).
2. Lösche jedes $v \in V$ und dessen inzidente Kanten mit Ws $1 - \frac{1}{d}$.
3. Lösche alle verbliebenen $e \in E$ und einen der adjazenten Knoten.

AUSGABE: Knotenmenge $V' \subset V$ mit $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in V'$

Korrektheit:

- Nach dem Samplen in Schritt 2 erhalten wir kein Independent Set.
- Die Modifikation in Schritt 3 stellt die gewünschte Eigenschaft her.

Größe des Independent Sets

Satz Größe des Independent Sets

INDEPENDENT SET berechnet ein V' erwarteter Größe $\frac{n^2}{4m}$.

Beweis:

- Sei X ZV für die Anzahl Knoten nach Schritt 1. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{d}$.
- Sei Y ZV für die Anzahl Kanten nach Schritt 2.
- Kante überlebt, falls beide adjazenten Knoten überleben. D.h.

$$\mathbb{E}[Y] = m\frac{1}{d^2} = \frac{dn}{2d^2} = \frac{n}{2d}.$$

- Schritt 3 löscht höchstens Y Knoten. D.h. $|V'| \geq X - Y$ mit

$$\mathbb{E}[X - Y] = \frac{n}{d} - \frac{n}{2d} = \frac{n}{2d} = \frac{n^2}{4m}. \quad \square$$

Korollar

Jedes $G = (V, E)$ enthält eine unabhängige Menge der Größe $\geq \frac{n^2}{4m}$.