Anwendung: Kanten-disjunkte Pfade

Problem Wahl kanten-disjunkter Pfade

Gegeben: n Paare Nutzer mit Mengen F_i von m Pfaden pro Nutzer
Gesucht: Auswahl n kanten-disjunkter Pfade

Satz Existenz kanten-disjunkter Auswahl

Es existiert eine kanten-disjunkte Auswahl, falls für alle $F_i, F_j, i \neq j$ die Anzahl nicht kanten-disjunkter Pfade höchstens $k \leq \frac{m}{8n}$ ist.

Beweis:

- Wähle jeden Pfad aus F_i unabhängig gleichverteilt mit Ws $\frac{1}{m}$.
- Ereignis $E_{i,j}$: Pfade aus F_i, F_j besitzen gemeinsame Kante.
- Es gilt $p = \Pr(E_{i,j}) \leq \frac{k}{m}$ für alle $i \neq j$.
- Sei d der Grad des Abhängigkeitsgraphen der $E_{i,j}$.
- $E_{i,j}$ ist unabhängig von $E_{i',j'}$ für $\{i,j\} \cap \{i',j'\} = \emptyset$. D.h. $d \leq 2n$.
- Wir erhalten $4dp \leq \frac{8nk}{m} \leq 1$.
- Mit Lovasz Local Lemma folgt $\Pr(\bigcap_{i \neq j} \overline{E_{i,j}}) > 0$. $\square$

Markov Kette

Definition Markov Kette

Ein *stochastischer Prozess* $\mathbf{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Menge von ZV.
Ein stochastischer Prozess $\mathbf{X}$ heißt *Markov Kette*, falls

$$\Pr(X_t = a_t \mid X_{t-1} = a_{t-1}, \ldots, X_0 = a_0) = \Pr(X_t = a_t \mid X_{t-1} = a_{t-1}).$$

Anmerkungen:

- D.h Zustand X_t hängt nur von X_{t-1} ab (unabhängig von Historie).
- Sei $\{0, 1, \ldots, n\}$ bzw. $\{0, 1, \ldots\}$ der Zustandsraum der X_t.
- Wir gehen von Zustand i nach Zustand j mit Übergangsws
$$p_{i,j} = \Pr(X_t = j \mid X_{t-1} = i).$$
- Wir definieren die Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n \text{ (bzw. } \infty)}$.
- Es gilt $\sum_{j \geq 0} p_{i,j} = 1$ für alle i.
- Sei $p_i(t)$ die Ws: Prozess besitzt zum Zeitpunkt t Zustand i.
- $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$ ist Zustandsverteilung. Es gilt
$$p_i(t) = \sum_{j \geq 0} p_j(t-1) p_{j,i} \text{ bzw. } p(t) = p(t-1)\mathbf{P}.$$

Eigenschaften von Markov Ketten

Anmerkungen:

- Wir bezeichnen die Ws in m Schritten von i nach j zu wechseln
$$p_{i,j}^m = \Pr(X_{t+m} = j \mid X_t = i).$$
- Offenbar gilt $p_{i,j}^m = \sum_{k \geq 0} p_{i,k} p_{k,j}^{m-1}$.
- Sei $\mathbf{P^{(m)}} = (p_{i,j}^m)_{0 \leq i,j \leq n}$. Dann gilt $\mathbf{P^{(m)}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P^{(m-1)}} = \mathbf{P}^m$ bzw.
$$p(t+m) = p(t)\mathbf{P^{(m)}}.$$
- **P** wird oft als gerichteter Graph $G(V, E)$ veranschaulicht.

Anwendung: Random Walk 2-SAT Algorithmus

Problem 2-SAT

Gegeben: 2-SAT Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$
Gesucht: erfüllende Belegung oder Ausgabe "nicht erfüllbar"

Algorithmus 2-SAT

EINGABE: $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, m (Parameter für Erfolgsws)

1. Starte mit einer zufälligen Belegung.
2. FOR $i = 1$ to $2mn^2$
   1. Falls Belegung erfüllend, Ausgabe der Belegung, EXIT.
   2. Wähle eine beliebige nicht-erfüllte Klausel k.
   3. Ändere für ein zufälliges Literal in k die Belegung der Variable.
3. Ausgabe "nicht erfüllbar".

Analyse 2-SAT

Satz 2-SAT

2-SAT findet für erfüllbare ϕ eine erfüllende Belegung nach erwartet $\mathcal{O}(n^2)$ Iterationen. Die Ausgabe "nicht-erfüllbar" erfolgt mit Ws $\leq \frac{1}{2^m}$.

Beweis:

- Sei S eine erfüllende Belegung und A_i die Belegung in Iteration i.
- Sei X_i eine ZV für die Anzahl der Übereinstimmungen in S und A_i.
- Falls $X_i = n$, so gibt 2-SAT die Belegung S aus.
- Es gilt $\Pr(X_{i+1} = 1 \mid X_i = 0) = 1$. In Schritt 2.2 ist k nicht erfüllt.
- Daher stimmen A_i, S an ≥ 1 Stelle nicht überein. D.h.

  $$\Pr(X_{i+1} = j+1 \mid X_i = j) \geq \tfrac{1}{2} \text{ bzw. } \Pr(X_{i+1} = j-1 \mid X_i = j) \leq \tfrac{1}{2}.$$

- Wir betrachten die Markov Kette $\mathbf{Y} = \{Y_t \mid t \geq 0\}$ mit

  $$Y_0 = X_0,\ \Pr(Y_{i+1} = 1 \mid Y_i = 0) = 1 \text{ und für } 1 \leq j < n:$$
  $$\Pr(Y_{i+1} = j+1 \mid Y_i = j) = \Pr(Y_{i+1} = j-1 \mid Y_i = j) = \tfrac{1}{2}.$$

Analyse 2-SAT

Beweis: (Fortsetzung)

- **Y** benötigt zum Erreichen von n mindestens solange wie $X_0, X_1, \ldots$
- **Y** modelliert einen Random Walk auf dem Intervall $0, 1, \ldots, n$.
- ZV Z_i: Anzahl Schritte bei Startwert i bis zum Erreichen von $i+1$.
- Sei $h_i = \mathbb{E}[Z_i]$. Es gilt $h_0 = 1$. Für $1 \leq i < n$ folgt
$$h_i = \mathbb{E}[Z_i] = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[1 + Z_{i-1} + Z_i] = 1 + \tfrac{1}{2} h_{i-1} + \tfrac{1}{2} h_i.$$
- Wir erhalten $h_i = 2 + h_{i-1} = 2 + 2 + h_{i-2} = \ldots = 2i + h_0 = 2i + 1$.
- D.h. unabhängig vom Startwert Y_0 benötigen wir Schrittzahl max.
$$\mathbb{E}[\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} Z_i] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[Z_i] = \sum_{i=0}^{n-1} 2i + 1 = n^2.$$
- Teile 2-SAT in Segmente der Größe von $2n^2$ Iterationen.
- Pro Segment benötigen wir $\leq n^2$ Iterationen zum Erreichen von n.
- Die Markov- Ungleichung liefert $\Pr(\sum_{i=0}^{n-1} Z_i \geq 2n^2) \leq \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$.
- D.h. wir finden S nicht in m Segmenten mit Ws höchstens $\frac{1}{2^m}$. $\square$

Anwendung: randomisierter 3-SAT Algorithmus

Modifikation für 3-SAT Algorithmus:
Setze im Algorithmus 2-SAT für die FOR-Schleife $i = 1$ to ∞.

Satz Komplexität für 3-SAT

3-SAT benötigt auf einer erfüllbaren 3-SAT Formel erwartet Zeit $\mathcal{O}(2^n)$.

Beweis:

- Seien S, A_i, X_i und Z_i analog zum vorigen Beweis. Es gilt nun
$$\Pr(X_{i+1} = j+1 \mid X_i = j) \geq \tfrac{1}{3} \text{ bzw. } \Pr(X_{i+1} = j-1 \mid X_i = j) \leq \tfrac{2}{3}.$$
- Wir betrachten die Markov Kette $\mathbf{Y} = \{Y_t \mid t \geq 0\}$ mit
$$Y_0 = X_0,\ \Pr(Y_{i+1} = 1 \mid Y_i = 0) = 1 \text{ und für } 1 \leq j < n:$$
$$\Pr(X_{i+1} = j+1 \mid X_i = j) = \tfrac{1}{3} \text{ und } \Pr(X_{i+1} = j-1 \mid X_i = j) = \tfrac{1}{2}.$$
- Nun folgt $\mathbb{E}[Z_i] = h_i = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}[1 + Z_{i-1} + Z_i] = 1 + \frac{2}{3} h_{i-1} + \frac{2}{3} h_i$.
$$\Rightarrow h_i = 3 + 2h_{i-1} = 3(1+2) + 2^2 h_{i-2} = \ldots = 3(2^0 + \ldots + 2^{i-1}) + 2^i h_0 = 2^{i+2} - 3$$
- D.h. $h_{n-1} = \Theta(2^n)$. Aus $\sum_{i=0}^{n-1} h_i = \mathcal{O}(2^n)$ folgt die Laufzeit. $\square$