Probabilistische Pfadsuche

Frage: Existiert ein Pfad in G von s nach t?

- Deterministisch mit Breitensuche lösbar in Zeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.
- Erfordert allerdings auch Speicher $\Omega(|V|)$.

Algorithmus PATH

EINGABE: $G = (V, E), s, t \in V$

1. Starte einen Random Walk in s.
2. Falls t in $4n^3$ Schritten erreicht wird, Ausgabe "Pfad". Sonst Ausgabe "kein Pfad".

Probabilistische Pfadsuche

Satz

Falls ein Pfad von s nach t existiert, so gibt PATH mit Ws $\geq \frac{1}{2}$ die korrekte Antwort. PATH benötigt $\mathcal{O}(\log(|V|))$ Speicher.

Beweis:

- Sei X ZV für die erwartete Zeit von s nach t per Random Walk.
- Es gilt offenbar $\mathbb{E}[X] \leq T_G < 4|V| \cdot |E| < 2n^3$. Mit Markov folgt
$$\Pr(X > 4n^3) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{4n^3} < \frac{1}{2}.$$
- PATH muss die jetzige Position und die Anzahl Schritte speichern.
- Dies benötigt $\mathcal{O}(\log(|V|))$ Speicher. $\square$

Motivation Monte Carlo Methode

Algorithmus APPROX-π

EINGABE: m (Anzahl der Samples)

1. Setze $Z = 0$.
2. FOR $i = 1$ to m
    1. Wähle zufälligen Punkt $P = (X, Y)$ mit $X, Y \in_R [-1, 1]$.
    2. Falls $\sqrt{X^2 + Y^2} \leq 1$, setze $Z = Z + 1$. (P ist im Einheitskreis)

AUSGABE: $Z \cdot \frac{4}{m}$ als Approximation für π

Anmerkungen:

- ZV $Z_i = 1$ gdw $\sqrt{X^2 + Y^2} \leq 1$ in der i-ten Iteration.
- Es gilt $\Pr(Z_i = 1) = \frac{\pi}{4}$ und daher $\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[Z_i] = \frac{m\pi}{4}$.
- D.h. $Z' = \frac{4Z}{m}$ ist eine gute Approximation für π.
- Die Chernoff Schranke auf Folie 52 liefert für $0 \leq \epsilon \leq 1$

$$\Pr(|Z' - \pi| \geq \epsilon\pi) = \Pr(|Z - \tfrac{m\pi}{4}| \geq \tfrac{\epsilon m\pi}{4}) = \Pr(|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \epsilon\mathbb{E}[Z]) \leq 2e^{-\frac{m\pi\epsilon^2}{12}}.$$

- D.h. für hinreichend großes m wird die Approximation beliebig gut.

(ϵ, δ)-Approximation

Definition (ϵ, δ)-Approximation

Die Ausgabe X eines Alg. ist eine (ϵ, δ)-Approximation für V, falls

$$\Pr(|X - V| \leq \epsilon V) \geq 1 - \delta.$$

Anmerkungen:

- APPROX-π liefert eine (ϵ, δ)-Approximation für $\epsilon \leq 1$, falls

$$2e^{-\frac{m\pi\epsilon^2}{12}} < \delta, \text{ d.h. } m \geq \frac{12\ln(\frac{2}{\delta})}{\pi\epsilon^2}.$$

(ϵ, δ)-Approximation mittels Chernoff

Satz (ϵ, δ)-Approximation mittels Chernoff

Seien $X_1, \ldots, X_m$ unabhängige IV mit $\mu = \mathbb{E}[X_i]$. Es gilt

$$\Pr\left(\left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu\right| \geq \epsilon\mu\right) \leq \delta \text{ für } m \geq \frac{3\ln(\frac{2}{\delta})}{\epsilon^2\mu}.$$

D.h. m Samples liefern eine (ϵ, δ)-Approximation für μ.

Beweis:

- Sei $X = X_1 + \ldots + X_m$. Sei $\mu' = \mathbb{E}[X] = m\mu$.
- Wir verwenden die Chernoff Schranke von Folie 52

$$\Pr(|X - \mu'| \geq \delta\mu') \leq 2e^{-\frac{\mu'\delta^2}{3}}.$$

- Es folgt

$$\Pr\left(\left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu\right| \geq \epsilon\mu\right) = \Pr(|X - \mu'| \geq \epsilon\mu') \leq 2e^{-m\cdot\frac{\mu\epsilon^2}{3}} \leq \delta. \square$$

DNF Counting

Szenario:

- Betrachten Probleme, die Eingaben x auf Werte $V(x)$ abbilden.

Problem DNF Counting

Gegeben: Formel ϕ in disjunktiver Normalform (DNF)
Gesucht: Anzahl der erfüllenden Belegungen $V(\phi)$ von ϕ

Anmerkungen:

- Beispiel für DNF-Formel: $\phi = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3)$.
- Es ist einfach, die Erfüllbarkeit von DNF-Formeln zu entscheiden.

SAT $\leq_p$ DNF Counting, d.h. DNF Counting ist NP-schwer.

- Sei ϕ eine SAT-Formel. Wir betrachten $\bar{\phi}$.
- Schreibe $\bar{\phi}$ mit de Morgans Regel als DNF-Formel.
- ϕ erfüllbar gdw. es existiert eine Belegung, die $\bar{\phi}$ nicht erfüllt.
- Zähle die Anzahl der erfüllenden Belegungen von $\bar{\phi}$.
- Ist diese weniger als 2^n, so ist ϕ erfüllbar.

FPRAS

Sei $|x|$ die Eingabegröße von x.

Definition FPRAS

Ein Algorithmus A ist ein *FPRAS (fully polynomial randomized approximation scheme)*, falls A bei Eingabe x, ϵ, δ mit $0 < \epsilon, \delta < 1$ eine (ϵ, δ)-Approximation von $V(x)$ in Zeit polynomiell in $\frac{1}{\epsilon}, \ln(\frac{1}{\delta}), |x|$ liefert.

Algorithmus NAIVE-DNF COUNTING

EINGABE: DNF-Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, m

1. Setze $X = 0$.
2. FOR $i = 1$ to m
    1. Wähle uniform eine Belegung B von $x_1, \ldots, x_n$.
    2. Falls B erfüllend, setze $X := X + 1$.

AUSGABE: $Y = X \cdot \frac{2^n}{m}$ als Approximation für $V(\phi)$

Analyse NAIVE-DNF COUNTING

Satz Analyse NAIVE-DNF COUNTING

Für $V(\phi) \geq \frac{2^n}{\mathrm{poly}(n)}$ ist NAIVE-DNF COUNTING ein FPRAS.

Beweis:

- Sei die IV $X_i = 1$ gdw. B in Iteration i erfüllend. Sei $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$.
- Es gilt $\mu = \Pr(X_i = 1) = \frac{V(\phi)}{2^n}$, d.h. $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \frac{2^n}{m} = V(\phi)$.
- D.h. $\frac{X}{m}$ liefert eine (ϵ, δ)- Approximation für $\mu = \frac{V(\phi)}{2^n}$, falls
$$m \geq \frac{3\ln(\frac{2}{\delta})}{\epsilon^2 \mu} = \frac{3\ln(\frac{2}{\delta}) \cdot 2^n}{\epsilon^2 V(\phi)}.$$
- Damit ist $Y = \frac{X}{m} \cdot 2^n$ eine (ϵ, δ)- Approximation für $V(\phi)$.
- Für $V(\phi) \geq \frac{2^n}{\mathrm{poly}(n)}$ ist m polynomiell in $\frac{1}{\epsilon}, \ln(\frac{1}{\delta}), n$.
- D.h. NAIVE-DNF COUNTING ist ein FPRAS für DNF Counting. $\square$

Problem: Für $V(\phi) = \mathrm{poly}(n)$ benötigen wir exp. viele Samples m.