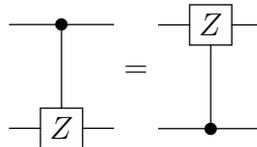




Präsenzübungen zur Vorlesung
 Quantenalgorithmen
 SS 2016
 Blatt 4 / 6. Juni 2016

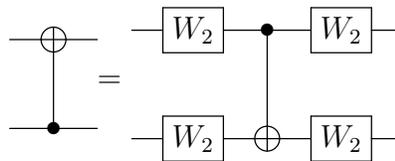
AUFGABE 1:

Beweisen Sie für $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ folgende Identität:



AUFGABE 2:

Beweisen Sie:



Erinnerung: $W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

AUFGABE 3:

Simulieren Sie das SWAP-Gatter mittels CNOT-Gattern. Dabei ist das SWAP-Gatter definiert als Gatter, das 2 Qubits vertauscht. Als Matrix:

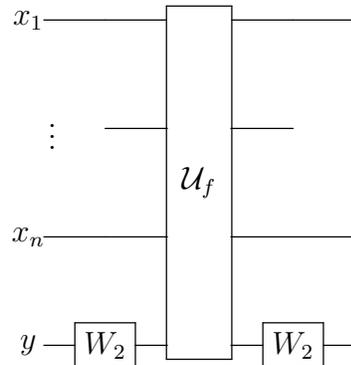
$$\text{SWAP} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

AUFGABE 4:

Sei $f: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ und U_f die reversible Einbettung von f , d.h. $U_f(\vec{x}, y) = (\vec{x}, y \oplus f(\vec{x}))$ für $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^n, y \in \mathbb{F}_2$.

Zeigen Sie, dass durch Anwendung des folgenden Schaltkreises auf $|\vec{x}y\rangle$ der Zustand $(-1)^{f(\vec{x})y}|\vec{x}y\rangle$ entsteht.



AUFGABE 5:

Ein n Qubit Toffoli-Gatter sei definiert durch die folgende Abbildung:

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, y \oplus x_1 x_2 \dots x_{n-1}).$$

(d.h. die reversible Einbettung von einem $n - 1$ -fachen AND)

- Zeigen Sie, dass ein $n \geq 3$ Qubit Toffoli-Gatter mittels (Standard-) 3 Qubit Toffoli-Gattern unter Benutzung von Hilfsvariablen simuliert werden kann. Wieviele 3 Qubit Toffoli-Gatter benötigen Sie?
- Zeigen Sie, dass dies auch geht, wenn Sie nur eine einzige Hilfsvariable haben.

Bemerkung zu (b): Da sie 1 Hilfsvariable t haben, sollten sie also die Funktion

$$f_n : (x_1, \dots, x_{n-1}, y, t) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, y \oplus x_1 \dots x_n, t)$$

realisieren. Beachten Sie, dass das die Hilfsvariable am Ende der Berechnung wieder auf ihren Ursprungswert gesetzt wird und das Ergebnis korrekt sein soll, egal ob $t = 0$ oder $t = 1$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie Rekursion. Eine mögliche Lösung zur Konstruktion von f_n verwendet f_{n-1} mit x_{n-1} als Hilfsvariable. Da dabei nicht klar ist, ob $x_{n-1} = 1$ gilt, wird gefordert, dass f_n unabhängig von t das korrekte Ergebnis liefern soll.