Prinzip der Inklusion- Exklusion

Ziel: Zählen von Elementen in nicht-disjunkten Mengen.

- **2 Mengen** A_1, A_2: Zählen zunächst die Elemente in A_1.
- Addieren dazu die Anzahl der Elemente in A_2.
- Zählen damit den Schnitt von A_1 und A_2 doppelt.

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- **3 Mengen:** Zählen die Elemente in A_1, A_2 und A_3 einzeln.
- Subtrahieren Anzahl der Elemente in $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ und $A_2 \cap A_3$.
- Damit wurden die Elemente in $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ dreimal gezählt und dreimal abgezogen.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

Prinzip der Inklusion-Exklusion

Satz Inklusion-Exklusion

Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}|.$$

Beweis

- Idee: Zeigen, dass jedes Element a genau einmal gezählt wird.
- Sei a in k Mengen A_i enthalten.
- a kommt im Schnitt der A_{i_j} vor, gdw $a \in A_{i_j}$ für alle i_j.
- Damit kommt a in genau $\binom{k}{r}$ Schnittmengen vor.
- Insgesamt zählen wir damit jedes a mit der Häufigkeit

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^n (-1)^{r-1}\binom{k}{r} &= -\sum_{r=1}^n \binom{k}{r}(-1)^r = 1 - \sum_{r=0}^n \binom{k}{r}(-1)^r \\ &= 1 - \sum_{r=0}^k \binom{k}{r}(-1)^r 1^{k-r} = 1-(1-1)^k = 1.\end{aligned}$$

Anwendung Inklusion-Exklusion

Bsp: Sei $A = \{x \in [100] \mid (2|x) \text{ oder } (3|x) \text{ oder } (5|x)\}$. Bestimme $|A|$.

- Definieren $A_k := \{n \in [100] \mid k \text{ teilt } n\}$. Damit gilt $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5$.
- Für die Kardinalität von A_k erhalten wir $|A_k| := \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor$.
- Außerdem gilt $A_i \cap A_j = A_{\text{kgV}\{i,j\}}$
- Damit erhalten wir insgesamt

$$
\begin{aligned}
|A| &= |A_2 \cup A_3 \cup A_5| \\
&= |A_2| + |A_3| + A_5| - (|A_6| + |A_{10}| + |A_{15}|) + |A_{30}| \\
&= 50 + 33 + 20 - (16 + 10 + 6) + 3 = 74
\end{aligned}
$$

Permutationen

Definition Permutation, Fixpunkt, Symmetrische Gruppe

Sei $\pi : A \to A$ eine Funktion.

1. Wir bezeichnen π als *Permutation* gwd π bijektiv ist.
2. Für eine Permutation π bezeichnen wir alle $a \in A$ mit $\pi(a) = a$ als *Fixpunkte*. π heißt *fixpunktfrei*, falls π keine Fixpunkte enthält.
3. Die Menge der Permutationen auf $A = [n]$ bezeichen wir als *symmetrische Gruppe* $\mathcal{G}_n$.

- Es gilt $|\mathcal{G}_n| = n!$.
- Schreibweise für ein $\pi \in \mathcal{G}_5$: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
- Das Element 4 ist der einzige Fixpunkt der Permutation π.
- Bei fester Anordnung von $a_1, \ldots, a_n \in A$ würde die zweite Zeile

$$(\pi(a_1)\pi(a_2)\ldots\pi(a_n))$$

genügen. Vorsicht: Verwechslungsgefahr mit Zyklenschreibweise.

Fixpunktfreie Permutationen

Definition Derangementzahl

Wir bezeichnen mit D_n die Anzahl fixpunktfreier Permutationen in $\mathcal{G}_n$. D_n heißt auch *Derangementzahl*. Mit ζ_n bezeichnen wir die Anzahl der Permutationen in $\mathcal{G}_n$ mit mindestens einem Fixpunkt.

- Offenbar gilt: $D_n = |\mathcal{G}_n| - \zeta_n$.
- Um D_n zu bestimmen, genügt es ζ_n zu bestimmen.
- A_i bezeichne die Menge der Bijektionen $\{\pi \in \mathcal{G}_n \mid \pi(i) = i\}$.
- Es gilt $\zeta_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Derangementzahl D_n

Satz Derangementzahl D_n

Für die Derangementzahl D_n gilt

$$D_n = n! \cdot \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

- Anwendung des Inklusion-Exklusion Prinzips liefert $\zeta_n = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{1 \le i_1 < ... < i_r \le n} |\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}|$.
- Schnittmengen A_{i_j} beinhalten π mit $\pi(i_j) = i_j$ für alle $j = 1, \ldots, r$.
- Alle anderen $n - r$ Elemente dürfen von π beliebig abgebildet werden. Dafür gibt es $(n - r)!$ Möglichkeiten, die Anzahl der Permutation auf $[n] \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$.
- Wir erhalten $\zeta_n = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \cdot (n - r)! = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{n!}{r!}$.
- Damit gilt $D_n = n! - \zeta_n = n!(1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{n!}{r!}) = n! \cdot \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!}$.

Zyklen von Permutationen

Definition Zyklus einer Permutation

Sei $\pi \in \mathcal{G}_n$. Wir bezeichnen $(i_1 \dots i_t)$ mit $i_j \in [n]$ als *Zyklus der Länge t* in π falls

$$\pi(i_j) = i_{j+1} \text{ für } 1 \leq j < t \text{ und } \pi(i_t) = i_1 .$$

Bsp:

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
- (1235) ist Zyklus der Länge 4 in π.
- Man beachte, dass $(1235) = (2351) = (3512) = (5123)$.
- Hingegen gilt $(1234) \neq (2135)$.
- (47) und (6) sind Zyklen der Längen 2 und 1 in π.
- Wir können π schreiben als $\pi = (1235)(47)(6)$.

Stirlingzahl erster Art

Definition Stirlingzahl 1. Art

Die *Stirlingzahl erster Art* $s_{n,k}$ bezeichne die Anzahl von Permutationen $\pi \in \mathcal{G}_n$ mit genau k Zyklen.

Es gilt

- $s_{n,k} = 0$ für $n < k$
- $s_{n,0} = 0$
- $s_{0,0} := 1$ nach Definition

Satz Summe der Stirlingzahlen für festes n

$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$

Beweis

- Jede Permutation besitzt mindestens 1 und höchstens n Zykel.
- Die Anzahl aller Permutation $\pi \in \mathcal{G}_n$ ist $n!$.
- Da $s_{n,k}$ und $s_{n,\ell}$ für $k \neq \ell$ disjunkt sind, folgt der Satz durch Anwendung der Summenregel.

Berechnung der ersten Stirlingzahl

Satz Berechnung $s_{n,k}$

Sei $s_{n,k} = \{\pi \in \mathcal{G}_n \mid \pi \text{ besitzt } k \text{ Zyklen.}\}$. Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}.$$

Beweis

- Fallunterscheidung für $\pi \in \mathcal{G}_n$

Fall 1: n ist in π in einem Zyklus (n) der Länge 1. Dann gibt es für die restlichen $k-1$ Zyklen genau $s_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten.

Fall 2: n ist in π in einem Zyklus der Länge mindestens 2. Wir können π darstellen, indem wir n in einen Zyklus von $\pi' \in \mathcal{G}_{n-1}$ mit k Zyklen einfügen. Es gibt $s_{n-1,k}$ Möglichkeiten für π' und $n-1$ Möglichkeiten zum Einfügen von n in einen der Zyklen.

- Da beide Fälle disjunkt sind, folgt der Satz aus der Summenregel.

Beispielkonstruktion: Rekusives Splitten von $s_{4,2}$

Bsp: $s_{4,2}$

- Fall 1: π enthält einen Zyklus (n) und einen Zyklus über [3].
  - $(123)(4), (132)(4)$.
- Fall 2: Betrachten 2 Zykel über [3] und fügen 4 ein.
  - $(12)(3) : (412)(3), (142)(3), (12)(43)$
  - $(13)(2) : (413)(2), (143)(2), (13)(42)$
  - $(1)(23) : (41)(23), (1)(423), (1)(243)$
- Insgesamt gilt: $s_{4,2} = s_{3,1} + 3 \cdot s_{3,2} = 2 + 3 \cdot 3 = 11$.

Stirling-Dreieck erster Art

Rekursionsformel: $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$

$n=0$						1					
$n=1$					0		1				
$n=2$				0		1		1			
$n=3$			0		2		3		1		
$n=4$		0		6		11		6		1	
$n=5$	0		24		50		35		10		1